حول المجسّمات الأفلاطونية

ليلى زيتوني[1]، هدى بن سليماني[2]، آسيا صياد[2]
[1]أستاذة بقسم الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة، القبة
[2]المدرسة العليا للأساتذة، القبة
leila.zitouni@g.ens-kouba.dz

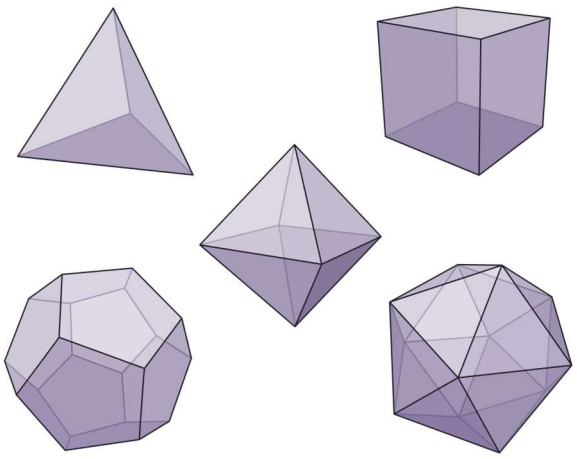
عددُ المضلعات المنتظمة المحدّبة غير منتهٍ؛ فابتداءً من المثلث متساوي الأضلاع، ثم المربع، والخماسي المنتظم، يُمكنك الاستمرار في تعداد المضلعات المنتظمة إلى ما لانهاية. لكن إذا انتقلنا إلى البعد الثالث، وشرعنا في البحث عن متعددات الأوجه المنتظمة المحدّبة، اصطدمنا بوجود خمسة منها فقط!

اجتماعُ الانتظام والندرة مَنح هذه المجسّمات جاذبيةً خاصةً لدى الإغريق. وكان أفلاطون (Plato) مفتونًا بها، فذكرها في أحد كتبه، وربطها بنظرية العناصر الأربعة. لذلك نُسبت هذه المجسّمات إليه، وأصبحت تُعرف باسم المجسّمات الأفلاطونية. ومنذ عصر الإغريق إلى يومنا هذا، ما تزال المجسّمات الأفلاطونية مصدرًا للدراسة والتأمل. ولا يقتصر الاهتمام بها على جوانبها الرياضية، بل يتجاوز ذلك إلى علوم أخرى. فالمجسّمات الأفلاطونية حاضرة حولنا في الطبيعة والفن والعمران، وغيرها.

فما السّر الرياضي الذي يجعل عدد المجسّمات الأفلاطونية خمسة فقط؟ للإجابة عن هذا السؤال، نستعرض في هذا المقال تاريخ هذه المجسّمات، وخصائصها، وأسباب تفرّدها.

1. نبذة تاريخيّة

يُعتقد أن الفيثاغوريين كانوا أول من عرف ثلاثة من المجسمات الأفلاطونية، وهي: رباعي الأوجه المنتظم (الهرم الثلاثي)، سداسي الأوجه المنتظم (المكعب)، واثنا عشري الأوجه المنتظم. أما المجسّمين الآخرين: ثُماني الأوجه المنتظم وعشروني الأوجه المنتظم، فيُنسب اكتشافهما إلى الرياضي الأثيني ثياتيتوس (Theaetetus)، الذي يُرجح أنه وضع طريقة لإنشاء المجسمات المنتظمة الخمسة. وقد ضمّن أقليدس (Euclid) هذه النتائج في الكتاب الثالث عشر من كتاب **الأصول** [7]، [8]، [11].



الصورة 1. المجسّمات الأفلاطونية

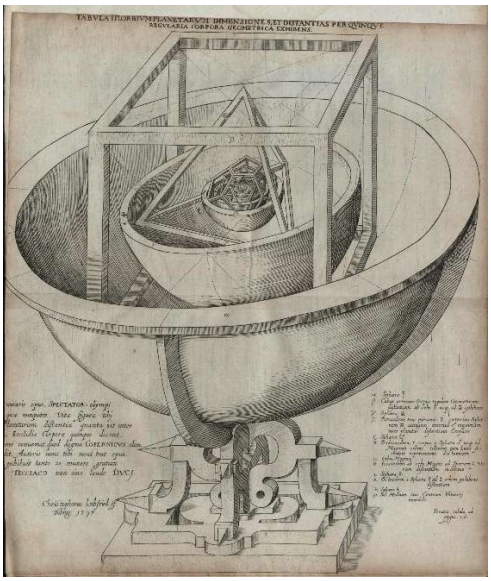
كان ثياتيتوس صديقًا لأفلاطون الذي عنون إحدى محاوراته باسم **ثياتيتوس**. وفي محاورة أخرى، هي **طيماوس** (Timaeus)، التي كتبت نحو سنة 360 ق.م، ربط أفلاطون المجسّمات الخمسة بنظرية العناصر الأربعة (التراب، والماء، والهواء، والنار)، وهي النظرية التي كانت سائدة لدى كثير من الفلاسفة الإغريق لتفسير طبيعة المادة وتحوّلاتها.

رأى أفلاطون أن عنصر التّراب يتكوّن من دقائق مجهريّة على هيئة مكعّبات؛ لأن المكعّب أكثر المجسّمات المنتظمة ثباتًا واستقرارًا. وربط عنصر الماء بالمجسّم عشروني الأوجه المنتظم، مفسرًا سيولة الماء بأنّ دقائقه تتّخذ هذا الشكل ممّا يجعلها أكثر نعومة وانسيابًا. أما عنصر الهواء فربطه بالمجسّم ثماني الأوجه المنتظم؛ إذ رأى أن دقائقه الصغيرة ملساء وخفيفة إلى درجة لا يكاد الانسان يشعر بها. وربط عنصر النّار برباعي الأوجه المنتظم، معتقدًا أنّ النار تحرق بسبب حدّة رؤوس دقائقها رباعية الأوجه [1]، [2].

ورأى أفلاطون أن أوجه هذه المجسّمات الأربعة يمكن تكوينها من نوعين من المثلثات، وأن هذين المثلثين يُمثلان "الجسيمات الأساسية" للطبيعة. ومن خلال إعادة ترتيب هذه المثلثات يمكن أن تتحوّل العناصر بعضها إلى بعض بتكوين أشكال هندسية جديدة. أما المجسّم اثنا عشري الأوجه المنتظم، فبما أن أوجهه خماسيات منتظمة وليست مثلثات، فقد خصصه أفلاطون للسماء. وسيُطلق أرسطو (Aristotle) لاحقًا على العنصر السماوي اسم الأثير، وهو العنصر الذي اعتبره مكوّنًا للأجرام السماوية [1]، [2].

قدّم أُقليدس عرضًا رياضيًا منهجيًا للمجسّمات الأفلاطونية الخمسة في الكتاب الثالث عشر، وهو الأخير، من كتاب **الأصول** (The Elements). وقد بيّن فيه الإنشاءات الهندسية لهذه المجسّمات، وبرهن خصائصها، وأثبت أنه لا توجد سوى خمسة متعدّدات أوجه منتظمة ومحدّبة. كما أثبت أن أوجه هذه المجسّمات لا يمكن أن تكون إلا من ثلاثة أنواع من المضلّعات المنتظمة، هي المثلثات متساوية الأضلاع، والمربعات، والخماسيات المنتظمة. ويرى كثير من مؤرخي الرياضيات أنّ معظم محتوى الكتاب الثالث عشر من **الأصول** يعتمد على أعمال ثياتيتوس.

استمرّ اهتمام العلماء بالمجسّمات الأفلاطونيّة حتى عصر النّهضة الأوروبية. ففي أواخر القرن السادس عشر، وأثناء دراسته لبنية النظام الشمسي، حاول الفلكي الألماني يوهانس كبلر (Kepler) تفسير أبعاد مدارات الكواكب اعتمادًا على المجسّمات الأفلاطونيّة. في كتابه **سر الكون** (Mysterium Cosmographicum)، افترض أن المسافات المدارية للكواكب الستة المعروفة آنذاك يمكن تمثيلها بواسطة المجسّمات الأفلاطونية الخمسة المتداخلة داخل كرات متراكزة.



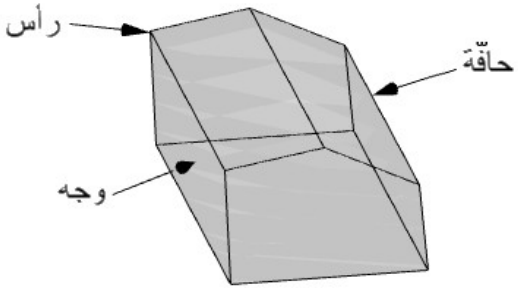
الصورة 2. نموذج كبلر لبنية النظام الشمسي من كتاب **سر الكون** (1596)

يقوم نموذج كبلر على إحاطة مدار الكوكب الأبعد، وهو زحل، بكرة تُمثل مداره، ثم إدراج مكعب داخلها، وتوضع داخل المكعب كرة هي مدار المشتري. وبعد ذلك يُدرج رباعي الأوجه المنتظم، ثم كرة تُمثل مدار المريخ، ثم اثنا عشري الأوجه، ثم كرة تُمثل مدار الأرض، ثم عشروني الأوجه المنتظم، ثم كرة تُمثل مدار الزهرة، ثم ثماني الأوجه المنتظم، أخيرًا كرة تمثل مدار عطارد، بينما تقع الشمس في مركز هذا البناء الهندسي.

2. متعدّدات الأوجه

يقابل عبارة "متعدّد الأوجه" في اللغة الإنكليزية كلمة polyhedron، وهي كلمة ذات أصل يوناني، تتكون من المقطعين: poly بمعنى "عديد"، وhedron بمعنى "مقعد" [10]. ويكون جمعها في الإنكليزيّة على صورتين: polyhedra، وهو الأكثر شيوعًا في الأدبيات الرياضية، وpolyhedrons.

ومتعدّد الأوجه هو مجسّم هندسي ثلاثي الأبعاد يحدّه على الأقل أربعة أوجه مضلّعة، بحيث يلتقي كل وجهين متجاورين في حافة مستقيمة، وتلتقي ثلاث حواف أو أكثر عند كلّ رأس. وتسمى القطعة المستقيمة الواصلة بين رأسين يقعان في وجهين مختلفين قطرًا لمتعدد الأوجه.

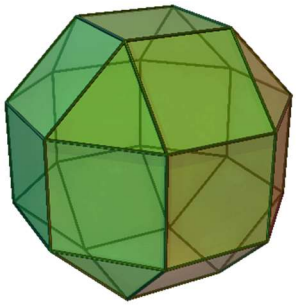


الصورة 3. رؤوس وحواف وأوجه متعدّد الأوجه

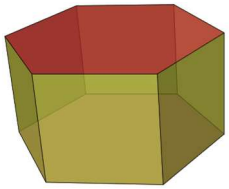
يمكن تصنيف متعدّدات الأوجه وفقًا لعدة خصائص، من أهمّها التحدّب والانتظام؛ فتُقسم إلى: متعدّدات أوجه محدّبة وغير محدّبة، كما تُقسم إلى متعددات أوجه منتظمة وغير منتظمة.

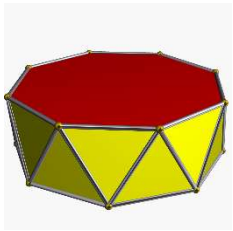
1.2 متعدّدات الأوجه المحدّبة

يُعد التحدّب من أهم المفاهيم في الهندسة، ويُستخدم معيارًا أساسيًا في تصنيف الأشكال الهندسيّة في مختلف الأبعاد. وتحظى الأشكال المحدّبة بأهمية خاصة في الرياضيات إذ تتمتع بخواص تجعل دراستها أبسط من دراسة الأشكال غير المحدّبة. نقول عن متعدّد أوجه إنه محدّب إذا كانت القطعة المستقيمة الواصلة بين أيّ نقطتين منه تقع داخل هذا المجسّم. ومن خصائص متعدّد الأوجه المحدّب أن مجموع أقياس الزوايا الداخلية عند كل رأس (مجموع أقياس زوايا الأوجه الّتي تحيط بكلّ رأس) أقل تمامًا من 360°. ومن أشهر متعدّدات الأوجه المحدّبة: المجسّمات الأفلاطونيّة، والمجسّمات الأرخميدية (Archimedean solids)، والمنشور (prism) والمنشور المضاد (antiprism)، ومجسّمات كاتالان (Catalan solids)، ومجسّمات جونسون (Johnson solids).

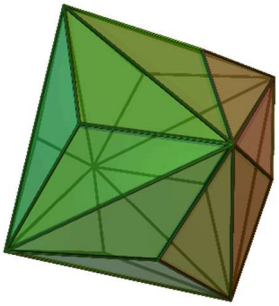


الصورة 4. مجسّم أرخميدي يتكون من 26 وجهًا: 8 مثلثات متساوية الأضلاع و18 مربعًا.
المجسّمات الأرخميدية محدّبة لكنها غير منتظمة (لاحظ أن الأوجه غير متطابقة). يوجد 13 مجسّمًا أرخميديًا.

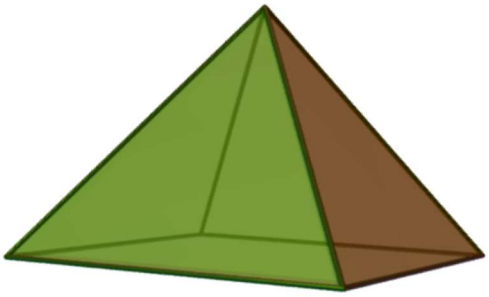




الصورة 5. على اليمين: منشور يتكون من 8 أوجه (6 مربعات وسداسيين). على اليسار منشور مضاد يتكون من 18 وجهًا (16 مثلثًا وثُمانيَين).
المنشورات والمنشورات المضادة محدبة لكنها غير منتظمة.



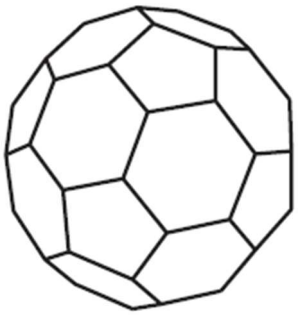
الصورة 6. أحد مجسّمات كاتالان، ويتكون من 24 وجهًا (مثلثات متساوية الساقين).
مجسّمات كاتالان محدّبة لكنها غير منتظمة (لاحظ أن الأوجه غير منتظمة). عدد مجسمات كاتالان 13.



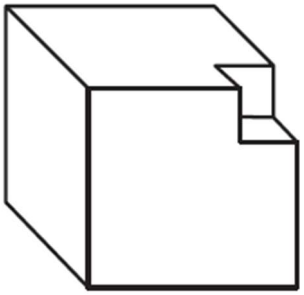
الصورة 7. الهرم المربع المتكون من 4 مثلثات متساوية الأضلاع ومربع، هو مثال عن مجسّمات جونسون التي يبلغ عددها 92.
مجسّمات جونسون محدّبة لكنها غير منتظمة (لاحظ أن الأوجه غير منتظمة)..

2.2 متعدّدات الأوجه غير المحدّبة

تضم متعدّدات الأوجه غير المحدّبة عدة فئات من أشهرها: مجسّمات كبلر-بوانسو (Kepler-Poinsot solids)، والمنشورات النّجمية والمنشورات النّجمية المضادّة، ومجسّمات ستيوارت الحلقية (Stewart toroids).



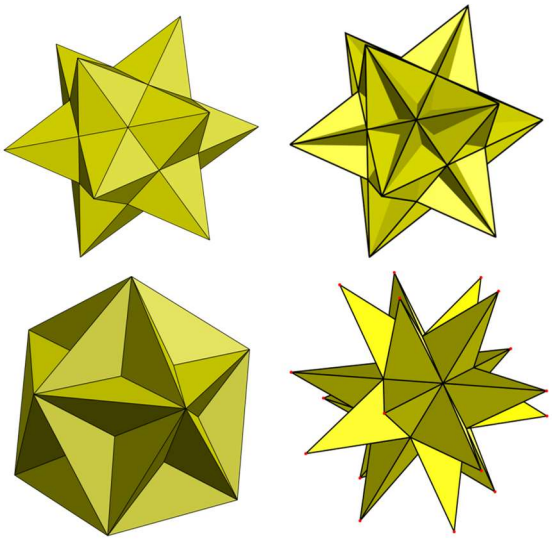
الصورة 8. متعدّد أوجه محدّب



الصورة 9. متعدّد أوجه غير محدّب

3.2 متعدّدات الأوجه المنتظمة

نقول عن متعدّد أوجه إنّه منتظم إذا كانت جميع أوجهه مضلّعات منتظمة متطابقة، ويلتقي العدد ذاته من الأوجه عند كلّ رأس، وتكون جميع زواياه متساوية. لا يُشترط في متعدد الأوجه المنتظم أن يكون محدّبًا. ولا توجد سوى تسعة متعددات أوجه، خمسة منها هي المجسّمات الأفلاطونيّة، والأربعة الأخرى هي مجسّمات كبلر-بوانسو.



الصورة 10. مجسّمات كبلر-بوانسو

3. المجسّمات الأفلاطونيّة

لا توجد سوى خمسة متعدّدات أوجه تكون في الوقت ذاته محدّبة ومنتظمة، وهي ما يُعرف بالمجسّمات الأفلاطونية. وقد أثبت أُقليدس في الكتاب الثالث عشر من كتاب **الأصول** أنّ هذه المجسّمات الخمسة هي جميع متعدّدات الأوجه المنتظمة المحدّبة الممكنة، وهي (انظر الشكل 1):

- رباعي الأوجه المنتظم أو الهرم الرباعي (tetrahedron)،
- سداسي الأوجه المنتظم أو المكعّب (hexahedron)،
- ثماني الأوجه المنتظم (octahedron)،
- اثنا عشري الأوجه المنتظم (dodecahedron)،
- عشروني الأوجه المنتظم (icosahedron).

ويُعد اقتصار المجسمات الأفلاطونية على خمسة فقط من النتائج البارزة في الهندسة؛ إذ على الرغم من وجود عدد لا نهائي من المضلّعات المنتظمة، فإن القيود الهندسية اللازمة لتجميعها حول كل رأس لا تسمح إلا بوجود خمسة مجسّمات منتظمة ومحدبة.

ويُرمز لمتعدّد الأوجه المنتظم بالرّمز $\{p, q\}$ الذي يُعرف باسم رمز شلافلي (Schläfli symbol)، حيث يمثّل p عدد الحواف المحيطة بكلّ وجه، وq عدد الأوجه الملتقية عند كلّ رأس [4].

المجسم	رباعي الأوجه المنتظم	سداسي الأوجه المنتظم	ثماني الأوجه المنتظم	اثنا عشري الأوجه المنتظم	عشروني الأوجه المنتظم
رمز شلافلي	{3,3}	{4,3}	{3,4}	{5,3}	{3,5}

مبرهنة

لا توجد سوى خمسة متعدّدات أوجه تكون في الوقت ذاته منتظمة ومحدّبة.

نعلم أنّ المجسّمات الأفلاطونيّة، وهي: رباعي الأوجه المنتظم، وسداسي الأوجه المنتظم، وثماني الأوجه المنتظم، واثنا عشري الأوجه المنتظم، وعشروني الأوجه المنتظم، جميعها متعدّدات أوجه منتظمة ومحدّبة. ولذلك، يكفي لإثبات المبرهنة أن نفرض وجود متعدّد أوجه منتظم ومحدّب، ثم نبرهن أنّه لا بد أن يكون أحد هذه المجسّمات الخمسة.

يعتمد البرهان الذي قدّمه أُقليدس في كتاب **الأصول**، على حقيقة أن مجموع أقياس زوايا الأوجه عند كلّ رأس من متعدّد أوجه محدّب أقل تمامًا من 360°. وبما أنّ أوجه متعدّد الأوجه المنتظم مضلّعات منتظمة متطابقة، ويلتقي العدد ذاته من الأوجه عند كل رأس، فإن عدد الأوجه عند كل رأس لا يقل عن ثلاثة، كما أن كل وجه هو مضلع منتظم لا يقل عدد أضلاعه عن ثلاثة.

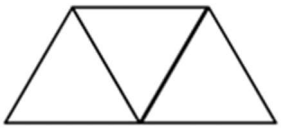
وسنبيّن أنّ هناك خمس حالات فقط يمكن فيها تجميع مضلّعات منتظمة متطابقة حول نقطة بحيث يكون مجموع زواياها أقل من 360°. ونبدأ بالحالة التي تكون فيها الأوجه عبارة عن مثلثات متساوية الأضلاع، ثم ننتقل إلى المربعات، وهكذا دواليك.

أ- المثلث متساوي الأضلاع

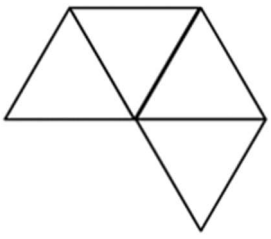
للمثلث متساوي الأضلاع ثلاثة أضلاع متساوية، وقياس كلّ زاوية 60°. وفي متعدد الأوجه، لا بد أن تلتقي ثلاثة أوجه على الأقل عند كل رأس.

- إذا اجتمعت ثلاثة مثلثات عند رأس واحد، فإن مجموع زواياها يساوي $3 \times 60° = 180°$، وهو أقل تمامًا من 360°.
- إذا اجتمعت ثلاثة مثلثات عند رأس واحد، فإن مجموع زواياها يساوي $4 \times 60° = 240°$، وهو أقل تمامًا من 360°.
- أما إذا اجتمعت خمسة مثلثات عند رأس واحد، فإن مجموع زواياها يساوي $5 \times 60° = 300°$ وهو أقل تمامًا من 360°.
- وفي حالة اجتماع ستة مثلثات عند رأس واحد، فإن مجموع زواياها يساوي $6 \times 60° = 360°$، فتقع الأوجه في مستوى واحد. ومن ثم، فإن اجتماع ستة مثلثات أو أكثر عند رأس واحد لا يؤدي إلى تكوين متعدد أوجه منتظم محدب.

وعليه، لا توجد إلا ثلاث حالات ممكنة عندما تكون الأوجه مثلثات متساوية الأضلاع، وهي اجتماع ثلاثة أو أربعة أو خمسة مثلثات عند كل رأس. وتقابل هذه الحالات على التّوالي: رباعي الأوجه المنتظم، ثماني الأوجه المنتظم، وعشروني الأوجه المنتظم.



{3,3}
مجموع الزوايا الداخلية 180°.



{3,4}
مجموع الزوايا الداخلية 240°.

{3,5}
مجموع الزوايا الداخلية 300°.

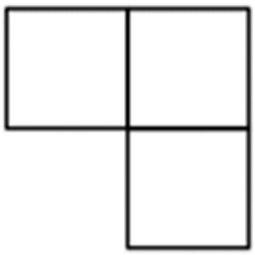
ستّة أوجه مثلّثة متقايسة الأضلاع تشكّل سطحًا مستويًا.

ب- المربع

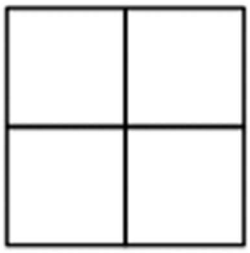
للمربّع أربعة أضلاع متساوية، وقياس كل زاوية من زواياه 90°.

- إذا اجتمعت ثلاثة أوجه مربّعة عند رأس واحد، فإن مجموع زواياها يساوي $3 \times 90° = 270°$، وهو أقل تمامًا من 360°.
- أما إذا اجتمعت أربعة أوجه مربّعة عند رأس واحد، فإن مجموع زواياها يصبح $4 \times 90° = 360°$، فتقع الأوجه في مستوى واحد. ومن ثم، فإن اجتماع أربعة مربعات أو أكثر عند رأس واحد لا يؤدي إلى تكوين متعدد أوجه منتظم محدب.

وعليه، لا توجد إلا حالة واحدة ممكنة عندما تكون الأوجه مربعات منتظمة، وهي اجتماع ثلاثة مربعات عند كل رأس، وتقابل هذه الحالة سداسي الأوجه المنتظم (المكعب).



{4,3}
مجموع الزوايا الداخلية 270°.



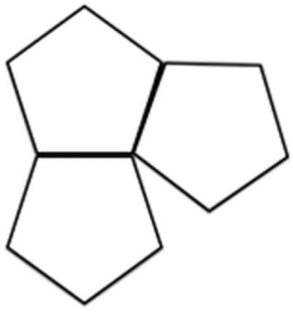
أربعة أوجه مربّعة تشكّل سطحًا مستويًا.

ج- الخماسي المنتظم

للخماسي المنتظم خمسة أضلاع متساوية، وقياس كل زاوية من زواياه 108°.

- إذا اجتمعت ثلاثة أوجه خماسيّة منتظمة عند رأس واحد، فإن مجموع زواياها يساوي $3 \times 108° = 324°$، وهو أقل تمامًا من 360°.
- أما إذا اجتمعت أربعة أوجه خماسية منتظمة، فإن مجموع زواياها يصبح $4 \times 108° = 423°$، وهو أكبر من 360°. ولذلك لا يمكن أن تتجمع أربعة خماسيات منتظمة أو أكثر عند رأس واحد لتكوين متعدد أوجه منتظم محدب.

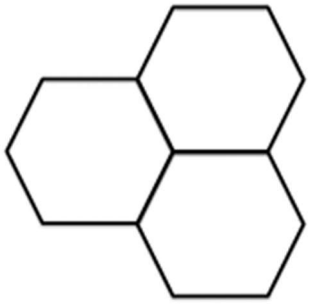
وعليه، لا توجد إلا حالة واحدة ممكنة عندما تكون الأوجه خماسيات منتظمة، وهي اجتماع ثلاثة خماسيات عند كل رأس، وتقابل هذه الحالة المجسم اثنا عشري الأوجه المنتظم.



{5,3}
مجموع الزوايا الداخلية 324°.

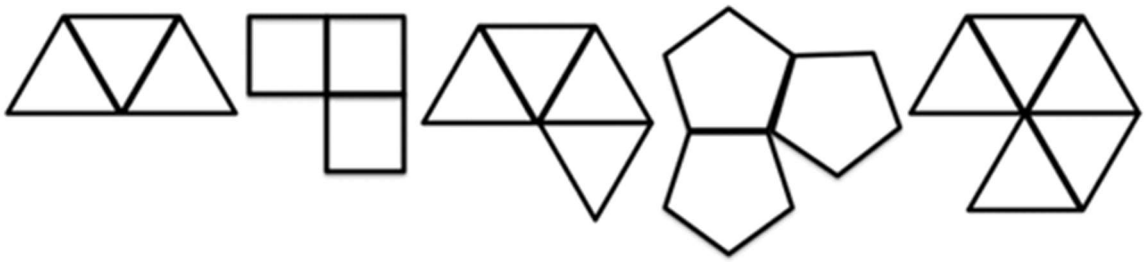
د- السداسي المنتظم

للسداسي المنتظم ستة أضلاع متساوية، وقياس كل زاوية من زواياه 120°. فإذا اجتمعت ثلاثة أوجه سداسية منتظمة عند رأس واحد، فإن مجموع زواياها يساوي $3 \times 120° = 360°$، فتقع الأوجه في مستوى واحد، ولا يمكن تكوين متعدد أوجه منتظم محدب ذي أوجه سداسية منتظمة.



ثلاثة أوجه سداسية منتظمة تشكّل سطحًا مستويًا.

وبناءً على ذلك، لا توجد سوى خمس حالات ممكنة لتكوين متعددات أوجه منتظمة ومحدّبة، وهي المجسّمات الأفلاطونيّة الخمسة: رباعي الأوجه المنتظم، وسداسي الأوجه المنتظم، وثماني الأوجه المنتظم، واثنا عشري الأوجه المنتظم، وعشروني الأوجه المنتظم.



4. صيغة أويلر لمتعددات الأوجه

نعرض الآن برهانًا آخر على عدم وجود سوى خمسة متعددات أوجه منتظمة ومحدبة. وهو برهان أكثر إيجازًا يعتمد على إحدى أشهر الصيغ في الرياضيات، وهي صيغة أويلر (Euler) لمتعددات الأوجه، التي تربط بين عدد الرؤوس وعدد الحواف وعدد الأوجه.

مبرهنة (صيغة أويلر لمتعدّدات الأوجه) [10]

إذا رمزنا إلى عدد رؤوس متعدد الأوجه بـ V وعدد حوافه بـ E وعدد أوجهه بـ F، فإنّ

$$V - E + F = 2.$$

ليكن متعدد أوجه منتظم، ورمزه وفق ترميز شلافلي {p,q}، حيث يُمثل p عدد أضلاع كل وجه، ويُمثل q عدد الأوجه الملتقية عتد كل رأس. بما أن كل وجه مضلع، فإن $p \geq 3$. وبما أن كل رأس تلتقي عنده ثلاثة أوجه على الأقل، فإن $q \geq 3$.

ومن جهة أخرى، فإن عدّ أضلاع جميع الأوجه يحسب كل حافّة مرتين، لأن كل حافّة مشتركة بين وجهين، وعليه

$$E = \frac{F.p}{2}.$$

كما أن $V = \frac{F.p}{q}$. باستخدام العلاقتين الأخيرتين مع صيغة أويلر، نحصل بعد التعويض والتبسيط على

$$F = \frac{4q}{2p - pq + 2q}.$$

نحن نعلم أنّ $4q$ وF عددان موجبان. وبالتالي، $2p - pq + 2q > 0$، أي $-2p + pq - 2q + 4 < 4$. وهذا يكافئ القول إن

$$(p-2)(q-2) < 4.$$

بما أنّ $p \geq 3$ و$q \geq 3$ وp وq عددان طبيعيان فإن $p > 2$ و$q > 2$. وعليه $(p-2)(q-2) > 0$.

لا يوجد سوى خمس حالات تحقق المتباينة، وهي: (3,3)، (4,3)، (3,4)، (5,3)، (3,5). وتقابل هذه الأزواج المجسّمات الأفلاطونيّة الخمسة.

خاتمة

على الرغم من أن التلميذ الجزائري يتعرّف خلال مساره الدراسي إلى بعض المجسمات الأفلاطونية وخصائصها، فإن الاقتصار على تقديمها بوصفها أشكالًا هندسية مستقلة قد يحول دون إدراك الخاصية التي تميزها جميعًا، وهي أنها تُمثل المجموعة الكاملة لمتعددات الأوجه المنتظمة والمحدبة، وأن عددها يقتصر على خمسة فقط. وتُعد هذه النتيجة من أجمل نتائج الهندسة، لما تجمعه بين البساطة والعمق، ولما تكشفه من العلاقة الوثيقة بين الانتظام والبنية الهندسية للمجسمات.

كما أن برهان هذه النتيجة يمكن تقديمه وتكييفه بما يتناسب مع المستوى المعرفي لتلاميذ المرحلة المتوسطة أو الثانوية، سواء بالاعتماد على الفكرة الهندسية القائمة على مجموع الزوايا عند كل رأس، أو من خلال تقديم صيغة أويلر لمتعددات الأوجه بصورة مبسطة. ومن شأن مثل هذا التناول أن يبرز قيمة البرهان الرياضي، ويثير فضول التلاميذ، ويحفزهم على التساؤل والبحث عن الأسباب الكامنة وراء هذه النتيجة المدهشة، بدل الاكتفاء بحفظ أسماء المجسمات وخصائصها.

الصورة 11. صورة الرياضي الإيطالي لوكا باتشيولي (Luca Pacioli)، ويعود تاريخها إلى عام 1495. يظهر في اللوحة اثنا عشري أوجه منتظم (في الأسفل على اليمين) وأحد المجسمات الأرخميدية (في الأعلى على اليسار).

المراجع

[1] بول، فيليب. العناصر: مقدمة قصيرة جدًا. ترجمة أحمد شكل، مؤسسة هنداوي للتّعليم والثّقافة، القاهرة، 2016.

[2] شيري، إريك. الجدول الدوري: مقدمة قصيرة جدًا. ترجمة محمد عبد الرحمن إسماعيل، مؤسسة هنداوي للتّعليم والثّقافة، القاهرة، 2016.

[3] Atiyah, M. & Sutcliffe, P. Polyhedra in physics, chemistry and geometry. *Milan Journal of mathematics*, 71, 2003, 33-58.

[4] Coxeter, H. S. M. *Regular polytopes*. Methuen and Co. Ltd., London, 1948.

[5] Cromwell, P. R. *Polyhedra*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[6] DeHovitz, D. C. *The platonic solids*. Whitman College, Washington, 2016.

[7] Heath, T. *A history of Greek mathematics.* Vol. 1. Oxford University Press, 1921.

[8] Lloyd, D. R. How Old are the platonic solids? *BSHM Bulletin : Journal of the British Society for the History of Mathematics*, 27(3), 2012, 131-140.

[9] Olsen, S. & Stakhov, A. P. *The mathematics of harmony*. World Scientific Publishing, Singapore, 2009.

[10] Richeson, D. S. *Euler's Gem : The Polyhedron Formula and the Birth of Topology*. Princeton University Press, New Jersy, 2008.

[11] Waterhouse, W. C. The discovery of the regular solids. *Archive for History of Exact Sciences*, 9 (3), 1972, 212-221.