اللوحة التي رسمتها الآلة: جماليات مجموعة ماندلبروت

سكينة عثماني
أستاذة بقسم الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة، القبة
sakina.othmani@g.ens-kouba-dz

1. مجموعة ماندلبروت

أمضى بينوا ماندلبروت Benoît Mandelbrot (1924–2010)، عالم الرياضيات الفرنسي ذو الأصول البولندية، معظم مسيرته البحثية في مركز أبحاث توماس جون واتسون التابع لشركة آي بي إم (IBM) بنيويورك. مستلهمًا من الأعمال الرائدة لجوليا (Julia) وفاتو (Fatou) في الديناميكا العقدية، ومستفيدًا من القدرات الحاسوبية الفريدة التي وفّرتها له مختبرات آي بي إم (IBM)، نجح ماندلبروت في استكشاف وتصوير شكل هندسيٍّ من تعقيدٍ مذهلٍ وجمالٍ أخّاذ في أواخر السبعينيات.

الصورة 1. بينوا ماندلبروت الأب الروحي للهندسة الكسورية.

هذا الشكل لم يكن سوى مجموعة ماندلبروت الذي يُمثل مرجعًا شاملًا يوثق سلوك عائلة كاملة من الدوال $f_c(z) = z^2 + c$.

تمكّن ماندلبروت من تصنيف كسوريات جوليا التي يستحيل حصرها، إذ لكل عدد عقدي c مجموعة جوليا J_c خاصة به، حيث قام بمسح نقاط المستوى العقدي وتصنيفها بناء على السؤال الجوهري: هل مجموعة جوليا J_c المرفقة بها متصلة أم منفصلة؟ وقد توصّل من هذا المسح الشامل إلى تعريف مجموعة رياضية مركزية أصبحت تُعرف باسمه:

$$M = \{c \in \mathbb{C} : \exists r > 0, |f_c^n(0)| \leq r, \forall n \in \mathbb{N}\},$$

حيث $f_c^n(z) = f_c(f_c(\cdots f_c(z)\cdots))$.

كان هذا التصنيف ثوريًا، لأنه حوّل مسألة تبدو معقدة (دراسة كل مجموعة جوليا على حدة) إلى شكل مركزي واحد يختصر سلوك العائلة بأكملها. إذ اكتشف أن حدود المجموعة M هي أكثر الحدود تعقيدًا وجمالًا في الرياضيات، فهي كسورية لا نهائية التفاصيل، تحتوي في كل مقياس تكبير نسخًا مصغرة من العالم الكسوري الكلي.

يمكن إنشاء مجموعة ماندلبروت باستخدام نفس عائلة الدوال التربيعية $f_c(z) = z^2 + c$. لكن هذه المرة، تُدرس الدالة من منظور مختلف تمامًا:

- نأخذ $z_0 = 0$ النقطة الابتدائية.

- ندرس سلوك المتتالية لكل قيمة للمعامل c في المستوى العقدي:

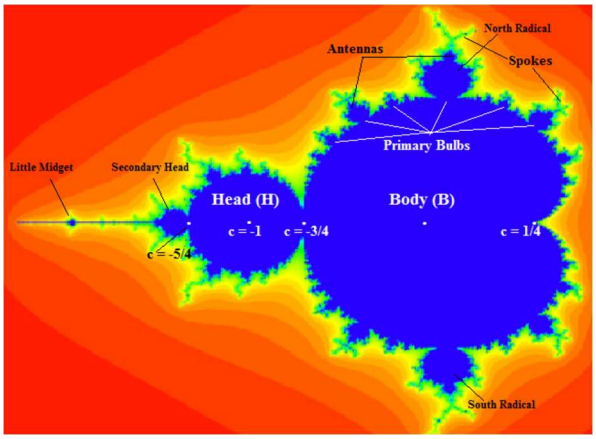
$$z_{n+1} = z_n^2 + c.$$

- إذا كانت المتتالية محدودة، فإن c تنتمي إلى مجموعة ماندلبروت M .

هذه الصيغة البسيطة تخفي عمقًا مذهلًا: موضع النقطة c في المستوى يُخبرنا ليس فقط بسلوك المتتالية، بل أيضًا يمنحنا معلومات جوهرية عن مجموعة جوليا المرتبطة بها. فالمجموعة M في جوهرها تربط بين سلوك النقطة الابتدائية وطبيعة البنية الكسورية لمجموعة جوليا [1]، [2].

2. النظام الخفي داخل الفوضى: فك شفرة الهيكل الهندسي لمجموعة ماندلبروت

تُظهر الصور الحاسوبية لمجموعة ماندلبروت، كما في الصورة 2، البنية الهندسية المقربة لهذا الشكل الرياضي المعقد، والتي تتكون من منطقة مركزية كبيرة على شكل قلب، تسمى مجموعة ماندلبروت، تتصل بها سلسلة من الفصوص الدائرية متناقصة الحجم، أكبرها يعرف غالبًا بالفص الرئيسي [1]، [3].



الصورة 2. التركيب الهندسي لكسور ماندلبروت

فيما يلي نستعرض أهم عناصر هذا الشكل الرياضي:

- **الجسم أو القلب (The Body / Cardioid):** يُمثّل النظام الديناميكي المستقر في أبسط صوره، إذ له نقطة ثابتة جاذبة وحيدة. عندما نختار قيمة المعامل c من داخل القلب (مثلًا $c = 0$)، يشكّل حوض الجذب لهذه النقطة الثابتة مجموعة فاتو. وتكون مجموعة جوليا في هذه الحالة هي الحد الفاصل لمجموعة فاتو التي تتميز بكونها بنية متصلة وسلسة نسبيًا. أما حدود القلب نفسه فهي حيث يبدأ هذا النظام البسيط في التحول: عند نقاط حرجة معينة على هذه الحدود (مثلًا $c = 0.25$) تفقد النقطة الثابتة جاذبيتها المستقرة عبر عملية تسمى "التشعب". يُشكل هذا التحول بوابة عبور إلى عالم من التعقيد؛ إذ تبدأ دورات جاذبة جديدة بالظهور (دورات من الرتبة 2، 3، 4، ...) في الفصوص الدائرية المتصلة بالقلب. هذا التفرع التدريجي هو المحرك الأساسي الذي يُولّد التنوع الهائل والمذهل للأشكال الكسورية الذي نراه في بقية أجزاء مجموعة ماندلبروت.
- **الرأس (The Head):** هو فص الاستقرار الحساس في مجموعة ماندلبروت، حيث تبدأ بساطة الهندسة الإقليدية بالتحول إلى تعقيد الهندسة الكسورية، مع الحفاظ على اتصال البنية الأساسية. جميع القيم c داخل الرأس تنتج نظامًا ديناميكيًا ذا نقطة ثابتة جاذبة وحيدة، لكن هذه النقطة تكون أقل جاذبية من نظيرتها في القلب. مجموعة جوليا داخل الرأس تظل متصلة لكنها تفقد البساطة الهندسية للدائرة، وتتحول إلى منحنيات كسورية ذات طيات وتشعبات دقيقة.

- **الفصوص الأولية (Primary Bulbs):** وتعرف أيضًا باسم الفقاعات الرئيسية أو البراعم الكبيرة. وهي الهياكل الدائرية الكبيرة المتصلة بالقلب. كل فص منها يمثل عائلة كاملة من قيم c التي تنتج أنظمة ديناميكية ذات دورة جاذبة محددة الرتبة.

تُمثل الفصوص الأولية في مجموعة ماندلبروت نقاط تحول حاسمة في استقرار النظام الديناميكي. ويتوافق ظهور كل فص على حدود القلب مع نقطة تشعب حيث ينتقل النظام من جذب بسيط (نقطة ثابتة) إلى جذب أكثر تعقيدًا (دورات متعددة). هذا التسلسل من التحولات هو الأساس الذي يُولّد التعقيد البصري.

- **الهوائيات (Antennas):** الهوائيات هي التراكيب الرفيعة المتفرعة التي تتشعب من حدود الفصوص في مجموعة ماندلبروت. وتُمثل مناطق حساسية قصوى حيث يؤدي أدنى تغيير في المعامل c إلى تحوّل جذري في سلوك النظام الديناميكي. فعند أخذ c على هوائي، يصبح النظام في حالة عدم استقرار بالغ: نقطتان متجاورتان قد يكون لهما سلوكان مختلفان تمامًا؛ إذ تنجذب إحداهما إلى منطقة معينة، بينما تتباعد الأخرى.

3. الكسوريات العشوائية

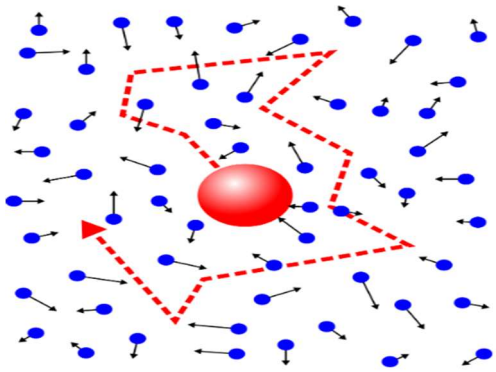
الكسوريات العشوائية هي أجسام لا توجد لها طريقة محددة لإنشائها، وتكون خصائصها الهندسية نتيجة للعشوائية. ويمكن إنشاؤها عن طريق المحاكاة من خلال إضافة عناصر عشوائية.

الصورة 3. روبرت براون مكتشف الحركة البراونية

الحركة البراونية

يعود مصطلح "الحركة البراونية" إلى عالم الأحياء الأسكتلندي روبرت براون Robert Brown (1773-1858) الذي لاحظ عام 1827، أثناء دراسته لجزيئات رحيق الأزهار، حركات غير منتظمة لجسيمات مجهرية تتحرك عشوائيًا في جميع الاتجاهات. فتساءل عما إذا كانت هذه الحركة ناتجة عن كون الجزيئات كائنات حية، البكتيريا مثلًا. ولاختبار هذه الفرضية، كرر التجربة باستخدام جزيئات معدنية ميكرونية الحجم، فلاحظ الحركة العشوائية نفسها، مما أثبت أن الظاهرة فيزيائية وليست بيولوجية محضة. لكن التفسير النظري لهذه الظاهرة لم يظهر إلا عام 1905، حين قدّمه ألبرت أينشتاين Albert Einstein (1879-1955) في إحدى مقالاته الشهيرة.

يمكن تفسير الحركة العشوائية للجسيم بتصادمه مع جزيئات السائل المحيطة، والتي تخضع للاهتزاز الحراري (الصورة 4). وينقل كل تصادم إلى الجسيم قوة تسمح له بحركة صغيرة في اتجاه عشوائي. ونظرًا إلى أن هذه التصادمات مختلفة الاتجاهات ومتنوعة القوى، فإن الجسيم يتحرك خطوات متقطعة وعشوائية، رغم أن لزوجة السائل تحد من تحركه. وهذه الخطوات المتتالية هي التي رسمت المسار المضطرب الذي رصده براون في حبوب اللقاح كما هو موضح في الصورة التالية.



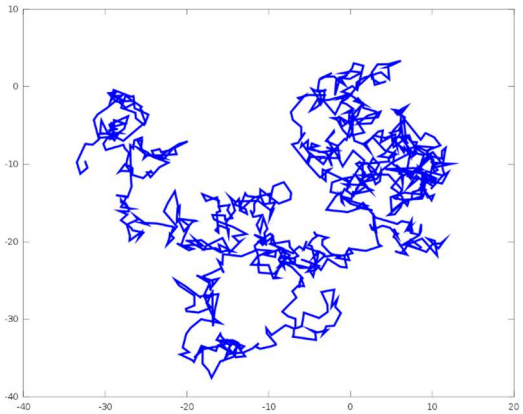
الصورة 4. الحركة العشوائية للجسيم

يتيح وصف التصادمات العشوائية بين الجزيئات استنتاج الخصائص الإحصائية لحركة الجسيم، حيث يبلغ متوسط الإزاحة التي يقطعها الجسيم خلال فترة زمنية معينة صفر، وذلك لأن احتمالات تحركه في جميع الاتجاهات متساوية نظرًا إلى توزع التصادمات بشكل عشوائي ومتناظر. غير أن متوسط الإزاحة وحده لا يكفي لوصف مدى الحركة الفعلي، لذا يستخدم متوسط الإزاحة التربيعي الذي يُعبّر عن المسافة المتوسطة التي يقطعها الجسيم بعد زمن معين، وهذه الكمية تكون دائمًا موجبة وتتسم بأنها تزداد بزيادة شدة وتكرار تصادمات الجزيئات بالجسيم. ومن ثم ترتفع سعة الحركة البراونية بارتفاع درجة الحرارة، لأن الجزيئات تكتسب طاقة حركية أكبر، مما يزيد من حدة التصادمات وتواترها.

كلما كبر حجم الجسيم، انخفضت سعة الحركة البراونية؛ فعندما يزداد حجم الجسيم، تزداد مساحتها ويزداد عدد التصادمات مع الجزيئات. لكن زيادة الحجم تؤدي أيضًا إلى زيادة كتلة الجسيمات، ويؤدي كل تصادم إلى إزاحة أقل، والجمع بين هذين التغيرين ينتج عنه إزاحة إجمالية أقل للجسيم. ويعود السبب في ذلك إلى خاصية إحصائية تسمى "قانون الأعداد الكبيرة"، والتي تعني، في سياق الحركة البراونية، أنه كلما زاد عدد التصادمات العشوائية، اقترب متوسط مجموعها من الصفر، وهذا ما يفسر عدم ظهور الحركة البراونية ماكروسكوبيا.

عمليًا، يبلغ الحجم النموذجي للجسيمات المرئية تحت المجهر ما لا يقل عن ميكرومتر واحد، وهو قريب بما يكفي من الحجم الذي تصبح عنده الحركة البراونية مهملة. وبالتالي، من خلال المجهر، يمكن ملاحظة أن الأجسام الكبيرة لا تخضع للحركة البراونية، في حين أن الأجسام الصغيرة تخضع لها.

يعتمد التمثيل الرياضي الأبسط للحركة البراونية على تقسيم الفترة الزمنية إلى فترات زمنية صغيرة متساوية، وأن الجسيم، فرضًا، يقطع خلال كل فترة خطوة، لكن اتجاهها يختار عشوائيًا وبشكل مستقل عن الخطوات السابقة. وهذا النموذج، المعروف باسم "السير العشوائي" (Random Walk)، يسمح بمحاكاة الحركة البراونية عدديًا باستخدام الحاسوب، مما يسهل دراسة خصائصها الإحصائية مثل متوسط الإزاحة التربيعي وسلوكها على المدى الطويل (الصورة 5).



الصورة 5. محاكاة الحركة البراونية لجسيم

لا يُعد هذا المسار العشوائي للجسيم مسارًا اعتياديًا، بل منحنى كسوريًا يتميز بالتشابه الذاتي الإحصائي، إذ يحافظ على نفس درجة التعقيد والتعرج على جميع المقاييس، وهذا ما يجعله نموذجًا أساسيًا في الهندسة الكسورية.

خاتمة

كشفت هذه الرحلة المعرفية عن تطور القواعد الهندسية ودورها الحاسم في تشكيل وتصنيف الكسوريات، حيث تشق مسارًا تصاعديًا ينطلق من أشكال كلاسيكية بديعة في بساطتها، ويرتقي إلى عوالمَ من التعقيد اللامتناهي الذي يتحدى التصور.

بدأت الرحلة بكسوريات هندسية ملموسة، قابلة للبناء المباشر. لتعبر بعدها منعطفًا مصيريًا مع الثنائية البنيوية التي أرستها أعمال جوليا وفاتو، والتي كشفت لأول مرة في تاريخ الرياضيات عن التعايش المذهل بين الاستقرار الديناميكي والفوضى الحتمية في فضاء المستوى العقدي. وتوجت هذه المسيرة باكتشاف مجموعة ماندلبروت، التي لا تُمثل مجرد إضافة إلى مجموعة الكسوريات، بل هي نقلة نوعية أعادت تعريف مفهوم التعقيد الرياضي نفسه. فهي تحمل في ثناياها اللانهائية تنوعًا خلاقًا لا يكرر نفسه.

يؤكد هذا التدرج التاريخي والمنطقي حقيقةً رياضيةً عميقةً: البساطة المجردة، كما تجسدها المعادلة $z^2 + c = 0$، يمكن أن تُنتج تعقيدًا هائلًا لا ينتهي. كما أن الفوضى التي نراها قد تخفي في داخلها نظامًا دقيقًا ومنظمًا للغاية.

وهكذا، تنتقل الرياضيات في ختام هذه الرحلة من كونها لغة لوصف العالم إلى فضاء إبداعي خالص يخلق عوالمه المتخيلة عبر المزج بين صرامة المنطق وروعة التشكيل البصري.

مقالات المؤلفة في المجلة:

- رابط مقال "الهندسة الكسورية: عالم من الجمال والتعقيد (1)"
https://www.ens-kouba.dz/magazine/pdf/n13/article13-12.pdf
- رابط مقال "الهندسة الكسورية: عالم من الجمال والتعقيد (2): بعض النماذج الأولية للكسوريات"
https://www.ens-kouba.dz/magazine/pdf/n14/article14-7.pdf
- رابط مقال "ثنائية النظام والفوضى الحتمية في مجموعات فاتو وجوليا"
https://www.ens-kouba.dz/magazine/pdf/n18/article18-13.pdf

المراجع

[1] Falconer, K. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Wiley, Chichester, 2014.

[2] Mandelbrot, B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman & Co., New York, 1983.

[3] Peitgen, H.-O., Jürgens, H. & Saupe, D. *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. Springer-Verlag, New York, 1992.

[4] Peitgen, H.-O. & Richter, P. H. *The Beauty of Fractals: Images of Complex Dynamical Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.