حديث عن المنطق

الجزء الثاني: المنطق عبر التاريخ

ناجي هرماس
أستاذ بقسم الرياضيات، جامعة زيان عاشور، الجلفة
nadjihermas@gmail.com

إلى الذكرى المثيرة والمُلهِمة للإمام تقي الدين أحمد بن تيمية رحمه الله

انطلق البحث فعليًا في طرق الاستدلال العقلي، والمسماة بالمنطق، في اليونان القديمة. وقد مهّد هذا البحث غير المسبوق الطريق لظهور المنطق القياسي الأرسطي ASL المنسوب إلى أرسطو. استخدم علماء الهندسة اليونانيون استدلالات معقدة في الهندسة لإثبات نتائج مرتبطة بالحساب في الأعداد الطبيعية، مثل مبرهنة فيثاغورس. ووضع أقليدس مسلّماته الخمس للهندسة المستوية، وهي المسلّمات المتضمنة لمنطقها الإنشائي الخاص. من ناحيتهم علّم الفلاسفة السفسطائيون الشباب اليونانيين الأثرياء كيفية اكتساب السلطة والنفوذ من خلال الجدال الفعّال المعتمد على الخداع اللفظي. وناقش بارمنيدس وهيراقليطس مسألة الوجود والعدم، وقد توقّعا ظهور جدل خلافي حاد حول ما يُسمى حاليًا في الدراسات المنطقية بمبدأ عدم التناقض. كما ناقش زينون مفارقاته المشهورة. وقدّم سقراط وأفلاطون نماذج للاستدلال الفلسفي الدقيق والعميق؛ حيث حاولا استنباط مفارقات من الآراء المطروحة، وسَعَيا عبر دراسة متأنية إلى إيجاد معتقدات فكرية متسقة يمكن التمسك بها.

استخدم أرسطو لأول مرة الحروف للإشارة إلى المصطلحات، واخترع نظامًا مسلماتيًا للبرهان في إطار منطقه القياسي مكوّنًا من قواعد استدلال من قبيل:

$$\frac{\text{كل } س \text{ هو } ع \quad \text{كل } ع \text{ هو } ص}{\text{كل } س \text{ هو } ص}$$

حيث تشير الأحرف الثلاثة س، ع، وَص إلى مجموعات أو فئات من الموجودات المادية المتضمنة للكائنات الحية. وقد عرّف أرسطو قواعد الاستنباط الصحيحة في منطقه، وهي تلك التي يمكن اشتقاقها بطريقة سليمة من قواعد الاستنباط الواردة في نظام استدلاله. كما عرّف المقولات الصحيحة بأنها تلك المقولات التي يمكن الوصول إليها بالاستخدام المتتابع لقواعد الاستنباط الصحيحة. ونوّه بشدة بخطورة قواعد الاستنباط الحاوية على أخطاء خفية، وهي تلك التي تكون غالبًا مكوّنة من مقدمات صحيحة ونتائج خاطئة.

اقترح أرسطو مبدأين منطقين هامّين؛ الأول منهما هو مبدأ عدم التناقض، والذي ينص على عدم إمكانية أن تكون المقولة ونفيها المنطقي صحيحتين في آن معًا. وهكذا، لا يمكن أن تكون العبارتان "س هو ع" وَ"س ليس هو ع" صحيحتين في الوقت نفسه. لقد اعتبر أرسطو هذا المبدأ واضحًا ويقينيًا، ولا يمكن إثبات صحته انطلاقًا من مقولات أكثر وضوحًا ويقينًا منه. وكان يعتقد أنه ليس كل معرفة يقينية قابلة للإثبات، وإلا سنحتاج في رأيه إلى سلسلة لا نهائية من الاستدلالات التي تثبت كل مقدمة بمقولات أخرى سابقة لها. ونعلم اليوم استنادًا إلى مبرهنة عدم الاكتمال الثانية لغودل أنه يتعذر إثبات صحة هذا المبدأ حتى في إطار الرياضيات. بل لقد تم تطوير أنواع من المنطق متجاهلة لهذا المبدأ الشديد

الخطورة، مثل المنطق التجريبي العلمي لميكانيكا الكم، والذي يتناول على نحو معتاد مقولات من قبيل "مرّ الإلكترون عبر الثقب ولم يمر". المبدأ المنطقي الثاني الذي صاغه أرسطو هو مبدأ الثالث المرفوع الذي تحدثنا عنه في الجزء الأول من هذا المقال. ولقد أوردنا ذكرًا في الجزء ذاته عن المنطق الفلسفي الحدسي الحديث الذي لا يتبنى هذا المبدأ.

يقال أيضًا إن أرسطو درس حججًا منطقية مرتبطة بمفهومي "الضرورة" و"الممكن"، وهي ضمن الحجج التي يتناولها المنطق الفلسفي النمطي الحديث. وناقش احتمالات الوقوع للأحداث المستقبلية. ويبدو أنه كان متبنيًا لقاعدة الضرورة الخاصة بالمنطق النمطي، غير أنه رفض من ناحية ثانية تقبّل صحة المقولات التي تنتج عنها وعن مبدأ الثالث المرفوع الذي تبناه بكل قوة، مثل "من الضروري أنه ستكون هناك معركة بحرية غدًا أو من الضروري أنه لن تكون هناك معركة بحرية غدا".

طوّر الرواقيون وغيرهم بعد أرسطو منطقًا يركز على مقولات من قبيل "إذا كانت ق فإن ق" و"ق وَق" و"ق أو ق"، وقد استخدموا لأول مرة في حججهم المنطقية قاعدة استدلال مهمة تُعرف في المنطق القضَوي الكلاسيكي الحديث (CPL) باسم MT (modus tollens) (انظر المقال [2]). كما طوروا منطقًا نمطيًا زمنيًا يتناول مقولات من قبيل "ق صحيحة دائمًا" و"ق صحيحة أحيانًا" و"ق صحيحة في لحظة معينة". وتساءلوا إن كان يوجد هناك برهان منطقي دقيق لمبدأ القدرية القائل بأن جميع الأحداث في الكون تحدث للضرورة الذاتية المستقلة. بيد أنهم اختلفوا حول معنى صحة المقولة "إذا كانت ق فإن ق"، حيث رأى فيلو أنها تكون صحيحة إذا لم تكن في الوقت الراهن ق صحيحة وق خاطئة، وهذا يتوافق تمامًا مع معنى الصحة الوارد في المنطق CPL للمقولة ذاتها. في حين رأى ديودوروس كرونوس أنها تكون صحيحة إذا لم تكن في أي وقت ق صحيحة وق خاطئة.

اعتبر أرسطو المنطق أساسيًا لجميع عمليات التفكير البشري، بينما اعتبره الرواقيون فرعًا أساسيًا من الفلسفة، وقد قسّموا هذه الأخيرة إلى ثلاثة فروع رئيسية، هي: الطبيعة والأخلاق والمنطق. واتفق الجميع على تدريس المنطق للطلاب مبكرًا قبل الخوض بعمق في المجالات الأخرى.

كان يُنظر في البدء إلى المنطق القياسي الأرسطي وإضافات الرواقيين المنطقية كفكرين متنافسين. بيد أنه سرعان ما قام مفكرون لاحقون بدمج هذين المنهجين في منهج واحد سمي بالمنطق التقليدي، والذي ساد على مدى الألفي عام التالية الغرب بأكمله.

في الوقت نفسه تقريبًا نشأ تقليد منطقي آخر في الهند والصين والتبت. أطلق عليه اسم المنطق البوذي، علمًا أن الهندوس وغيرهم اتبعوه أيضًا. تناول هذا المنطق العديد من المواضيع المهمة في الدراسات المنطقية الغربية، مثل الاستدلالات والمغالطات واللغات. وتشيع في هذا المنطق استدلالات من قبيل

حيثما يوجد دخان توجد نار مثلما في المطبخ

هناك دخان

هناك نار

وذكر المطبخ هنا هو تأكيد لفظي على أن قاعدة الاستدلال مستوحاة استقرائيًا من خبرتنا اليومية، والتي نتجت عنها فيما يبدو حكاية الارتباط الدائم للدخان بالنار. وعلى هذا الأساس تُعد هذه القاعدة بامتياز إحدى قواعد الاستنباط الاستقرائية للمنطق التجريبي العادي OEL.

لقد ازدرت الحضارة اليونانية القديمة، وهي السلف الرسمي للحضارة الغربية الحديثة، النبوات والوحي والرؤى المنامية، واعتبرتها تقاليد شرقية محضة غير منتجة للمعارف العقلية المنطقية. ولعل أحد الأدلة على هذا المنحى الغربي المتعالي هو ما تعرّض له فيثاغورس من اضطهاد وتشنيع وتهميش من قبل فلاسفة الإغريق القدامى، حيث اعتبروه دجالًا ومقلدًا للشرقيين في تأسيسه لتعاليم دينية وبإيمانه الغامض بفكرة تناسخ الأرواح ذات الأصل الشرقي الواضح. وينظر

الغربيون إلى الشرق بشقيه الأقصى والأوسط على أنه كل الأقاليم الواقعة جنوب وشرق البحر المتوسط. ويبدو أن هذه الرؤية المتعالية جعلت التراث الحضاري الشرقي غامضًا وغير مفهوم جيدًا حتى اللحظة الراهنة في الغرب. ويقال إن الرياضياتي الهندي رامانوجان صرح في مرات كثيرة بإنه يتلقى الرياضيات من الله، وهي جملة بدت على الأرجح لهاردي كما لو أنها تنتمي إلى عالم الأساطير. وبغض النظر عن تصريحات هذا الشخص العبقري، فإنه تمتّع حقًا بحدس عميق استثنائي، إذ صاغ آلاف العلاقات الرياضية المعقدة والمدهشة، والتي لا تزال المئات منها تفتقد حتى اللحظة الراهنة إلى البراهين الضرورية. وما أثار الغرابة والحيرة حول سلوكه هو أنه شكل عليه إيجاد براهين مناسبة للكثير منها، وصعب عليه من ثمة إقناع علماء الرياضيات بصحتها.

وبالمجمل، يؤكد بعض الغربيين على أوجه التشابه بين الشرق والغرب؛ فهم يرون أن التفكير البشري المنطقي متطابق جوهريًا في كل مكان. بينما يؤكد آخرون على وجود اختلافات جوهرية بين العالَمين، ويحذرون من فرض الطابع الفكري الغربي على التقاليد الحضارية الشرقية. ولقد وجد بعض المنظرين المنطقيين في التراث المنطقي الشرقي أشياء توافق هواهم في اختراع أنواع جديدة من المنطق متجاوزة المنطق الفلسفي الغربي. فعلى سبيل المثال أُسر بعضهم بما اكتشفه الأنثروبولوجيون من أن البوذيين الزن يستمتعون مستخدمين مفارقات منطقية مثل الجملة "يد واحدة تصفق ولا تصفق" المعروفة باسم المفارقة الشرقية، للانتقال من التفكير المنطقي العادي إلى التنوير الروحي العميق.

أصبحت أوروبا الرومانية متدينة بالدين المسيحي بعد أن تبنّاه الإمبراطور الروماني ثيودوسيوس رسميًا عام 380م. وترجم المفكر المسيحي بوثيوس التراث المنطقي الإغريقي إلى اللاتينية، وألّف كتبًا وشروحًا حول منطق أرسطو. ويُشكل كتاباه "التصنيفات" (Categories) و"حول التأويل" (On interpretation) المصدر الرئيس للمنطق القديم في أوروبا. وقد دافع بوثيوس بحماسة عن مبدأ توافق العلم الإلهي المسبق مع الحرية الإنسانية.

في الفترة الممتدة بين عامي 800 وَ1200م هيمن العالم العربي الإسلامي على الدراسات الفكرية والفلسفية والمنطقية، حيث قام المفكرون المسلمون بترجمة التراث الفكري الإغريقي إلى العربية، وألّفوا كتبًا وشروحًا دراسية حول الفلسفة والمنطق اليوناني، بل ويقال إنهم كتبوا رسائل أصيلة حول المواضيع ذاتها. وتناول المناطقة المسلمون بالنقاش مفاهيم منطقية، مثل القياس المنطقي، والمنطق النمطي، والعبارات اللغوية الشرطية، والكليات، والإسناد، والوجود. وأصبحت بغداد وقرطبة في الأندلس مركزين مهمين للدراسات الفلسفية والمنطقية في العالم.

وعلى نهج الفلاسفة المسيحيين الذين اعتبروا المنطق اليوناني مهمًا لعلم اللاهوت، بادرت الفرق الإسلامية المسماة "فرق الكلام"، على نحو ما ذكر في المرجع [1]، إلى إعادة بناء العقيدة الإسلامية المتعلقة بأركان الإيمان الغيبية الستة على أسس عقلية جديدة مستلهمة من التراث المنطقي الإغريقي. وأجهل من ناحيتي لماذا أطلق على هذه الفرق اسم "فرق كلام". وقد أكد الشهرستاني [1] أن ذلك يعود إلى أمرين: إما إلى المسألة الكبرى المختلف حولها، وهي مسألة الكلام، وإما إلى تبنيهم المنطق اليوناني، ويقصد به على الأرجح المنطق القياسي لأرسطو، في مناهجهم. وذكر الشهرستاني أن المنطق والكلام مترادفان. وبحثت كثيرًا في كتابه عن مقصوده بالكلام، ولم أعثر عليه. ولذلك أجهل بالكامل معنى مقولته الأخيرة.

ولقد واجه الفقهاء وعلماء الحديث، الذين تمسكوا بالنهج الاعتقادي الذي بلغهم عن الصحابة رضي الله تعالى عنهم، تطاولات فرق الكلام على العقيدة الإسلامية بحزم، وذادوا عنها بلا هوادة، فألّفوا رسائل وكتبًا حول هذه عقيدة، وناظروا بشجاعة وبحضور الأمراء والملوك أحيانًا عتاة المتكلمين. ولعل أشهر ما أُلّف حول العقيدة الإسلامية كتاب "الفقه الأكبر" للإمام أبي حنيفة ورسالة الإمام الطحاوي والكتب "الانتصار لأهل الأثر" و"الفتوى الحموية الكبرى" و"العقيدة الواسطية" للإمام بن تيمية. وقد نتج عن هذه الخصومات الفكرية أنواعًا عديدة من المنطق الاعتقادي، والتي تُشكل جميعها جزءًا مهمًا من التراث المنطقي الإسلامي. منها على سبيل المثال "منطق الاعتقاد لدى أهل السنة والجماعة"، والذي حدد أساسياته الفقهاء وعلماء الحديث، و"منطق الاعتقاد للأشاعرة"، و"منطق الاعتقاد للمعتزلة".

في أوروبا المسيحية، انتعشت الدراسات المنطقية في القرنين الحادي عشر والثاني عشر الميلاديين، بفضل أنسلم، وبيتر أبيلارد، والترجمات اللاتينية لمجموعة كتب أرسطو المسماة **الأورغانون** (Organon). واهتم المناطقة المسيحيون بالكليات وبكيفية إصباغ المعاني والدلالات على العبارات النحوية اللغوية الصرفة، وكتبوا أبيات شعرية تعليمية مثل أبيات باربرا-سيلارنت (Barbara-Celarent) لتعليم القياس المنطقي. وقد ألّف كل من بيتر الإسباني ووليام من شيروود كتبًا دراسية حول المنطق. كما استخدم توما الأكويني، وهو الفيلسوف المسيحي الأكثر تأثيرًا في العصور الوسطى، المنطق على نطاق واسع في كتاباته الفلسفية الغزيرة. ويعتقد بعض الغربيين أن ما قدّمه هذا الفيلسوف من حجج واستدلالات منطقية يفوق ما قدّمه أي شخص آخر على مر التاريخ.

في القرن الرابع عشر الميلادي صاغ وليام الأوكامي مبدأه الفكري المعروف باسم مبدأ أوكام "اقبل أبسط نظرية تفسر البيانات المعطاة تفسيرًا وافيًا". كما طور منطقًا نمطيًا، وحاول تحليل اللغة متجنبًا الميتافيزيقا. بينما تخيل معاصره جان بوريدان حمارًا شُلّت حركته عندما وضع في منتصف المسافة تمامًا بين وعاءي طعام، ليُعبّر عن الجانب غير المنطقي للحرية والاختيار الإنسانيين. وقد وضع بوريدان عدة مجموعات لقواعد معيارية مميزة للقياسات المنطقية الصحيحة.

في بداية عصر النهضة الأوربية استشرف لايبنتز التطورات المستقبلية للقارة الأوروبية. وقد اقترح لأول مرة فكرة لغة رمزية حسابية تختزل الاستدلالات المنطقية إلى حساب، متخيلًا أنه إذا ما نشبت خلافات بين مجموعة من مناطقة، فبإمكانهم أن يمسكوا الأقلام والأوراق ويقولوا: لنحسب فقط. ويقال إن لايبنتز ابتكر حسابًا منطقيًا مشابهًا لحساب بول، بيد أنه لم يُعرف إلا بعد أن نشر الأخير عمله. وقام أويلر بتحويل المقولات التي يستهدفها المنطق ASL إلى رسومات مكونة من الدوائر؛ حيث رسم مثلًا المقولة "كل س هو ع" على هيئة دائرة س داخل دائرة ع أكبر منها. وصار يستدل مستخدمًا هذه الرسومات على صحة القياسات المنطقية. ويُذكر في بعض كتب التاريخ بأن الموسوعي الفرنسي ديدرو، والذي كان ملحدًا، تحدى علانية في مناظرة عامة في سانت بطرسبرغ أويلر المتدين أن يثبت رياضيًا وجود الله، فرد الأخير: "سيدي،

$$\frac{a+b^n}{n}=x$$

إذن الله موجود. تفضل بالرد". صدم ديدرو من هذه الإجابة، وشعر بالحرج الشديد. ولقد كان أويلر محقًا في رده، إذ لا وجود لمنطق استنباطي بشري، سواء داخل الرياضيات أو خارجها، قادر على إثبات وجود الله.

في نهاية القرن الثامن عشر قال كانط صاحب فكرة الحدس الخالص والناقد الشديد للعقل المحض بأن أرسطو هو من ابتكر المنطق وأتقنه، ولا يمكن إضافة أي شيء آخر ذي أهمية جوهرية، وذلك على الرغم من تصوره لإمكانية تحسين أساليب التعليم. وإذا كان زعم هذا الفيلسوف حول عقم العقل الإنساني في تطوير اللاهوت صحيحًا، فإن قوله إن المنطق ASL مكتمل ونهائي جانب الصواب كثيرًا، فقد عرفت الدراسات المنطقية ثورة حقيقية في بداية القرن العشرين.

خلال القرن التاسع عشر حاول العديد من المفكرين ابتكار صيغ جبرية للمنطق، حيث اقترح دي مورغان ترميزات جديدة للمقولات المعتنى بها في المنطق ASL، فكتب مثلًا عبارة "كل س هو ع" على النحو "س)ع"، وعبارة "بعض س هو ع " على النحو "س()ع "، ثم فرض قواعد محددة على ترميزاته من أجل الوصول إلى جميع القياسات المنطقية الصحيحة. بيد أنه اعترف من ناحية أخرى بأن المنطق في عصره عاجز عن معالجة حجج منطقية من قبيل "جميع الكلاب حيوانات، لذلك جميع رؤوس الكلاب رؤوس حيوانات". وقد اشتهر دي مورغان بقانونيه المنطقيين المعروفين جيدا في المنطق CPL. وفي قصته "أليس في بلاد العجائب" أورد كارول قياسات منطقية بسيطة وملاحظات حول المنطق. كما ابتكر فين مخططاته الشهيرة المساعدة في تقييم صحة الاستدلالات القياسية.

وفي تطور فكري لافت قدّم هيغل وماركس منطقًا جدليًا منكرًا لمبدأ عدم التناقض، وقد اعتبراه بديلًا عن المنطق التقليدي. واقترح هيغل أنه ينبغي على المنطق أن ينظر إلى التناقضات المنطقية باعتبارها تفسيرًا لكيفية تطور الفكر البشري عبر التاريخ؛ إذ قال إن كل رأي فكري يثير نقيضه، ثم يتحد الرأيان في توليفة أسمى جديدة. بينما اعتبر ماركس

الأحداث المتضاربة في العالم تناقضات منطقية حقيقية، وطور استنادًا إلى ذلك نظريته الشيوعية حول الصراعات السياسية والثورات الاجتماعية. وقد رأى بعض المفكرين في هذا الفلسفة الجدلية الجديدة بديلًا عن الفلسفة التقليدية، في حين حذر النقاد من خطورتها لأنها مغالِطة وتخلط بين الخصائص المتضادة في العالم مثل "الساخن والبارد" و"الرأسمالي والبروليتاري" وبين التناقضات المنطقية الذاتية مثل الشيء الواحد الذي يكون في نفس الزمن وبنفس المعنى أبيضًا وغير أبيض.

كانت الجبور البوليانية التي اخترعها بول إنجازًا رائدًا في الدراسات المنطقية، لأنها أتاحت لأول مرة استخدام عمليات جبرية سهلة للتحقق من صحة بعض الاستدلالات المنطقية. ولتوضيح ذلك نورد هنا المثال التالي: لنرمز بالحرف "M" إلى مجموعة الكائنات الفانية، وبالحرف "H" إلى مجموعة البشر، وبالحرف "G" إلى الإغريق. ثم لنتبنى مثلما فعل بول القاعدة "وضع حرفين معًا يمثل تقاطع المجموعتين"، فتصير الكتابتان مثلًا "HM" و"MH" تشيران إلى مجموعة البشر الفانين، بعد ذلك نعوض كما فعل بول دائمًا المقولات القياسية "كل البشر فانون" و"كل الإغريق بشر" و"كل الإغريق فانون" على الترتيب بالمعادلات $H = HM$ و$G = GH$ و$G = GM$. وهكذا يُحول الاستدلال القياسي التقليدي

كل البشر فانون

كل الإغريق بشر

كل الإغريق فانون

إلى العمليات الحسابية التالية:

$$\left.\begin{matrix} H = HM \\ G = GH \end{matrix}\right\} \Longrightarrow G = GHM = GM$$

اعتقد بول بأن المنطق جزء من الرياضيات، ومع ذلك استفاد الفلاسفة مثل علماء الرياضيات من إنجازه. ولقد أصبحت جبوره مع مرور الوقت محورية في الدراسات المنطقية الحديثة. ففي عشرينيات القرن العشرين طوّر كل من فيتجنشتاين وبوست ووكاسيفيتش، بالاعتماد على هذه الجبور، النظرية المنطقية المعروفة في أدبيات الرياضيات باسم "نظرية النموذج (Model theory) للمنطق CPL". وتُعد دوال الحقيقة وجداول الحقيقة في هذه النظرية حاسمة في تحديد مفهومي الصواب والخطأ في المنطق CPL. ولعل المبرهنة التالية ينبغي أن تكون في خلفية كل دارس للرياضيات.

مبرهنة (الصواب والخطأ في CPL). من أجل كل مقولة P في المنطق CPL، الدعاوى الثلاثة التالية متكافئة:

1. P قابلة للبرهان (صحيحة) في CPL؛
2. P محققة في جميع الجبور البولينية؛
3. P محققة في الجبر البولياني $\mathbb{A} = (\{\emptyset, \{\emptyset\}\}; \cup, \cap)$.

ونستنتج كحالة خاصة أن CPL غير متناقض.

بفضل بكتابه **حساب المفاهيم** (Begriffschrift) المؤلف من 88 صفحة والصادر عام 1879 أُعتبر فريجه مؤسس المنطق الكلاسيكي الحديث. ففي هذا الكتاب قدّم فريجه صياغة رمزية جديدة أكثر شمولية، سمحت له لأول مرة بدمج ألفاظ المنطق القياسي الأرسطي "كل" و"لا" و"بعض" مع ألفاظ الرواقيين "إذاكان ... فإن" و"و" و"أو" في نظام استدلالي منطقي جديد. وبالتالي صار من الممكن التحدث في هذا النظام عن استدلالات منطقية من قبيل "إذا كان كل ما هو أ أو ب هو ج ود، فإن كل ما ليس د هو ليس أ". كما بيّن فريجه كيفية تحليل الحجج المنطقية التي تتضمن مقولات بها علاقات مثل "إذا كان هناك شخصا يحبه الجميع، فإن كل واحد يحب شخصًا ما" و"إذا كان كل واحد يحب شخصًا ما، فقد يوجد أو لا يوجد شخص يحبه الجميع".

لقد قدّم فريجه نظامًا استدلاليًا صوريًا من الرتبة الأولى للمنطق الرياضي الكلاسيكي مع قواعد معيّنة لتحديد المقولات الصحيحة نحويًا وكذا صحة البراهين. ولأنه استخدم رموزًا معقدة في كتابه، فقد تم تجاهل أعماله في البداية حتى أشاد بها راسل، الذي كان معجبًا بها أشد الإعجاب، في أوائل القرن العشرين.

يُعد فريجه رائد مذهب المنطقية (Logicism) في الفكر الرياضي. وفي الحقيقة ألّف كتابه السابق لتحقيق هدفه المنشود، وهو إثبات بأن الحساب في الأعداد الطبيعية قابل للاختزال إلى جزء من المنطق. لقد سعى إلى تعريف جميع المفاهيم الأساسية للحساب في الأعداد الطبيعية، مثل "مفهوم العدد الطبيعي" وعمليتي "الجمع" و"الضرب"، بمصطلحات منطقية بحتة، وإثبات جميع الحقائق الأساسية في هذا الحساب باستخدام المسلمات المنطقية وقواعد الاستدلال المنطقي فقط. وعام 1893 اضطر فريجه في خضم نشاطه الفكري إلى الاستعانة بمقولة بسيطة تبدو غير ضارة للوهلة الأولى، وهي المقولة المعروفة في أدبيات الرياضيات باسم مبدأ الفهم البسيط (The naive comprehension principle)، الذي صاغه كانتور من قبل لتعريف المجموعات في الرياضيات. اعتبر فريجة هذا المبدأ مسلّمة، ونص عليه كالآتي: من أجل كل خاصية خ(س) متعلقة بمتغير فردي س، توجد مجموعة وحيدة ع محققة للشرط

$$س \in ع \Leftrightarrow خ(س)$$

بيد أن راسل المتحمس الكبير لتيار المنطقية وجّه عام 1902 رسالة إلى فريجه فحواها أن تطبيق مبدأ الفهم البسيط على الصيغة الرياضية $س \notin س$ يؤدي إلى إحداث تناقض في الرياضيات. وعلى هذا الأساس فلا ينبغي أن توجد مجموعة ع محققة للشرط

$$ع \in س \Leftrightarrow س \notin س$$

شعر فريجه بالإحباط الشديد من جراء ذلك لأنه خيّل إليه بأن عمل حياته قد انهار بالكامل، ولم تنجح محاولاته لتجاوز التناقض المنطقي الناشئ عن المفارقة الطارئة. من ناحيته اعتقد راسل أن النظام المنطقي الذي قدّمه فريجة معيب قليلًا وأن بالإمكان إصلاحه. وعلى هذا الأساس عمل مع أستاذه السابق وايتهيد على تطوير المنطق ونظرية المجموعات بطريقة تجنبهما الوقوع في التناقض السابق، مدخلين بذلك إلى الرياضيات مفاهيم جديدة تدعى "الأنواع" أو "الأنماط" (Types)، والتي أصبحت بمر الوقت جزءًا مهمًا من الرياضيات الحديثة. لقد كان ثمار عمل راسل وأستاذه الكتاب الضخم **أساسيات الرياضيات** (Principia Mathematic) الذي نشر في الفترة 1910-1913، والذي أصبح سريعًا الملهم الرئيس للدراسات المنطقية في القرن العشرين.

في إطار سعيه إلى إيجاد حل لمشكلة عدم التناقض في الرياضيات اقترح هيلبرت مسألته الثانية الخاصة بإثبات اتساق الحساب في الأعداد الطبيعية، كما قدّم الخطوط الأساسية لبرنامجه الهادف تحديدًا إلى إعادة تأسيس الرياضيات برمتها، وإنشاء رياضيات جديدة، يفترض أن تكون خالية من التناقض، أطلق عليها اسم الرياضيات الصورية (Formal mathematics). وفي هذا الاتجاه تم تطوير فرع جديد في الرياضيات، يدعى "الميتارياضيات" (Metamathematics)، والذي يُعد بمثابة المخبر الذي تصاغ داخله النظريات الرياضية الصورية. وهكذا تم تطوير الرياضيات الانتهائية (Finitary mathematics) خلال عقد الثلاثينيات من القرن العشرين، وهي الرياضيات التي تستخدم وحدها في صياغة النظريات المشار إليها. واعتمادًا على هذه الرياضيات تم دراسة اللغات الرياضية من مختلف الرتب القادرة على وصف محتوى الرياضيات العادية بشكل صوري. وامتدت الدراسة إلى المنطق بمختلف رتبه، وإلى نظم الاستدلال الرياضية المكونة لما يعرف باسم "نظرية البرهان" (Proof theory).

أثبتت مبرهنة عدم الاكتمال الأولى لغودل، خلافًا لرأي فريجه وراسل، أنه لا يمكن اختزال الحساب في الأعداد الطبيعية إلى نظام صوري بحت؛ فلا توجد مجموعة متسقة من المسلّمات وقواعد الاستدلال تكفي لإثبات جميع الحقائق في هذا الحساب. ومع ذلك تمخض مبدأ الصورنة الذي نادى به هيلبرت، والذي يحتفي بالحقيقة في الرياضيات كما أعلنها

فريجه وراسل، عن خاصية نحوية مذهلة تتمتع بها الرياضيات؛ فلا شيء منها يستمد من خارج أبجدية لغة نظرية المجموعات ونحوها، ولا يُحتاج في الحقيقة إلى تصورات متعالية مثل مبدأ المثل والصور العقلية لأفلاطون أو غيره من أجل فهم ومعرفة الحقيقة فيها. فالأمر كله منوط بقدرتنا على التعامل بمهارة فائقة، وباستخدام عدد قليل من القواعد النحوية، مع مجموعة منتهية من الرموز، التي ترسم حسب الذوق على الأوراق.

ومن وجهة النظر هذه، والتي يجهلها الكثير منا وإن صارت منذ فترة واقعًا حاسمًا، يتبين للرائي أن علماء الرياضيات بمختلف أطيافهم ليسوا سوى جماعة من النحويين، ولا يختلف عملهم في الجوهر عن عمل النحويين العرب مثلًا. ولعله من المفيد للبعض عرض النتيجة التالية، والتي تكشف بحق عن الطابع النحوي العميق للرياضيات. من أجل نقاش أوسع حول هذه النتيجة انظر المرجع [6].

مبرهنة (الحقيقة في الرياضيات كخاصية نحوية). من أجل كل نظرية رياضية Th ومن أجل كل صيغة رياضية P الدعوتان التاليتان متكافئتان:

1. P صحيحة في إطار Th؛
2. يوجد برهان نحوي مصاغ بلغة نظرية المجموعات للصيغة P انطلاقًا من Th، أي $Th + ZFC \vdash P$ حسب الترميز المعتمد في كتب المنطق.

بَيّنت مبرهنة عدم الاكتمال الثانية لغودل، وهي النتيجة الأكثر إثارة للدهشة والحيرة في الفكر الغربي الحديث، أنه يستحيل إثبات خلو الرياضيات من التناقضات المنطقية. في حين كشفت مبرهنته حول الاكتمال الدلالي أن مفهوم الصحة في الرياضيات مكافئ لمفهوم "التحقق في جميع العوالم الدلالية الممكنة". وأضحت هذه النتيجة مدخلًا إلى نظرية كبرى في الرياضيات، ألا وهي "نظرية النماذج" (Model theory)، وذلك بعد أن صاغ تارسكي عام 1934 مفهوم الدلالات بمعناه الشامل في الرياضيات. ولقد توسعت هذه النظرية على نحو هائل في العقود الأخيرة بعد أن أضيفت إليها "نظرية الفئات المنطقية" (Theory of logical categories). وفي الحقيقة ظهرت بالتوازي مع ذلك دراسات منطقية كثيفة حول ما أصبح يعرف حاليًا بالمنطق الفئوي (Categorical logic).

اقترح هيلبرت مسألته العاشرة التالية "هل توجد طريقة آلية فعّالة منتظمة (Regular effective automated method) قادرة على إخبارنا إن كانت معادلة ديوفانتية معطاة لها حلول صحيحة أو لا؟". بيد أن هذه المسألة بدت للوهلة الأولى غامضة وغير مفهومة في نظر علماء الرياضيات، وذلك بسبب افتقادهم وقتها لرؤية واضحة ومحددة حول ماهية الطرق الآلية والفعالة. وقد بُذلت خلال النصف الأول من القرن العشرين جهودٌ فكرية ضخمة من قبل علماء من الصف الأول من أمثال غودل، تورينغ، تشرتش، باوست، ماركوف، كولموغوروف، يوسبانسكي لإيجاد تعاريف رياضية رصينة لهذه الطرق. وتم صياغة بعض هذه التعاريف، كما تم الإثبات سريعًا بأنها متكافئة ولا اختلاف بينها. ومع ذلك تعذر الوصول إلى قناعة راسخة ونهائية لدى هؤلاء العلماء بأنها كافية لتغطية جميع الطرق الآلية والفعّالة الممكن وجودها.

ونذكّر بالمناسبة أن تورينغ استطاع تخيّل آلات حاسبة نظرية ذات ذاكرات لا نهائية، عرفت تاريخيًا باسم آلات تورينغ TMs (Turing machines)، وقدّم وصفًا دقيقًا لها، وهي تعتبر "لغة البرمجة النظرية" الأولى في العالم. وقد قام تورينغ بإحصاء الكثير جدًا من العمليات الحسابية التي يمكن أن تنجزها آلاته، آملًا من وراء ذلك تقديم حجج قوية قادرة على إقناع علماء الرياضيات بقبول فكرة أن الحسابات التي تقوم بها آلاته تُمثل جميع طرق الحساب الآلية والفعالة. ولكن مع ذلك لم يبدو واضحًا تمامًا انتماء هذا السلوك الفكري كليًا إلى الرياضيات، لذلك رد الحسم في المسألة إلى المبدأ التالي المسمى "أطروحة تشيرتش-تورينغ" (Church-Turing thesis)، والذي يأتي شطره من خارج الرياضيات "طرق الحساب

الآلية والفعالة، والتي تسمى بالخوارزميات، هي بالضبط طرق الحساب التي تقوم بها آلات تورينغ". وتتزايد مع مرّ الوقت الدلائل المؤيدة لهذه الأطروحة، ولم يظهر حتى الآن ما ينقضها.

وهكذا أدى الاهتمام الكثيف بالمسألة العاشرة لهيلبرت إلى تأسيس نظرية الحوسبة، العلم الذي يعنى بالخوارزميات وبالعمليات الحسابية والمسائل القابلة للمعالجة بواسطة الخوارزميات. ويُعد هذا العلم فرعًا رئيسيًا من المنطق وعلم الحاسوب النظري.

في ثمانينيات القرن التاسع عشر لاحظ بيرس أنه يمكن محاكاة الروابط المنطقية مثل "و" و"أو" كهربائيًا بواسطة ما سماها "البوابات المنطقية". ولقد لعبت هذه الفكرة دورًا محوريًا في تطوير الحواسيب بعد أن أعاد اكتشافها شانون عام 1938. ويُذكر في التاريخ أن نيومان زار عام 1935 جامعة كامبريدج لرؤية تورينغ، وقد دعاه إلى زيارته خلال الفترة 1936-1937 بجامعة برينستون. على هذا الأساس يرجح أن نيومان اطلع جيدا على عمل الآلات TMs، وهو الأمر الذي جعله فيما يبدو مساعدًا رئيسيًا خلال العام 1945 في تصميم أول حاسوب قابل للبرمجة في التاريخ، والذي كان يحتوي على بوابات منطقية وذاكرة وأجهزة إدخال وإخراج. وقد أصبح المنطق يُدرس في أقسام علوم الحاسوب، لأنه مهم في تطوير هذه الأجهزة، سواء من حيث مكوناتها المادية أو برمجياتها.

يعتبر المنطق في الوقت الراهن فرعًا رئيسيًا من بيت فكري يُدعى "العلوم المعرفية"، والذي يشمل فلسفة العقل، ونظرية المعرفة، واللغويات، وعلم النفس المعرفي، وعلم الأعصاب المعرفي، والذكاء الاصطناعي.

- رابط الجزء الأول من المقال
https://www.ens-kouba.dz/magazine/pdf/n19/article19-5.pdf

مراجع

[1] الشهرستاني، الملل والنحل، دار الكتب العلمية، 1992.

[2] ناجي هرماس، الرياضيات التعليمية: ما هي الرياضيات التي تُدرَّس؟ الجزء الثاني: مبادئ المنطق الرياضي الكلاسيكي، مجلة بشائر العلوم، العدد 16، 2025.

[3] Bimbó, K. *Proof theory: Sequent calculi and related formalisms*, CRC Press, 2015.

[4] Bocheński, J. *A history of formal logic*, University of Notre Dame, 1961.

[5] Copi, I. & Gould, J. *Readings on logic*, Macmillan, 1964.

[6] Ebbinghaus, H.-D., Flum, J. & Thomas, W. *Mathematical logic*, Springer, 2021.

[7] Kahle, K. & Rathjen, M. (Ed.) *Gentzen's Centenary: The quest for consistency*, Springer international publishing, 2015.

[8] Kleene, S. C. *Introduction to metamathematics*, D. Van Nostrand Company, 1952.

[9] Kneale, W. & Kneale, M. *The development of logic*, Clarendon Press, 1962.

[10] Nidditch, P. H. *The development of mathematical logic*, Routledge, 1962.