الأعداد القابلة للإنشاء (2)

حمزة خليف

أستاذ الرياضيات (متقاعد)

hkhelif@gmail.com

رأينا في الجزء الأول من هذا المقال (العدد 2 من بشائر العلوم) مفهوم الأعداد القابلة للإنشاء، ورأينا أن مجموعة هذه الأعداد التي أشرنا إليها بـ $\mathscr{C}$ حقل جزئي من حقل الأعداد الحقيقية $\mathbf{R}$، مستقر بالنسبة إلى الجذر التربيعي. كما قمنا بتبيان العلاقتين $\mathbf{Q}\subset\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}\subset\mathbf{R}$ اللتين كتبناهما، تجاوزا، $\mathbf{Q}\subset\mathscr{C}\subset\mathbf{R}$.

وفي هذا الجزء (الثاني والأخير) نتطرق إلى تمييز هذه الأعداد، كما أننا سنورد إجابات ولو مختصرة عن تساؤلات اليونانيين القدامى المتعلقة بـ: تربيع الدائرة، وتضعيف المكعب، وتثليث الزاوية، وقابلية إنشاء المضلعات المنتظمة.

1. تمييز الأعداد القابلة للإنشاء

1.1. تذكير حول تمديدات الحقول

كل الحقول المتناولة هنا تبديلية.

1) ليكن K، L حقلين. إذا كان K حقلا جزئيا من L نقول إن L تمديد لـ K. نشير إلى ذلك بـ $K\subset L$.

إذا كان α عنصرا من L نرمز بـ $K(\alpha)$ إلى الحقل الجزئي الأصغر من L والذي يحوي K و $\{\alpha\}$.

نلاحظ أن وجود هذا الحقل يؤكده كونه يساوي تقاطع كل الحقول الجزئية التي تحوي K و $\{\alpha\}$.

وبصورة عامة، إذا كانت α_1، α_2، ...، α_n عناصر من L، نرمز بـ $K(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ إلى الحقل الجزئي الأصغر من L والذي يحوي K و $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$.

لدينا على سبيل المثال:

$$\mathbf{Q}(1)=\mathbf{Q}\left(-\frac{3}{5}\right)=\mathbf{Q}\ ,\ \mathbf{Q}\left(\sqrt{2}\right)=\left\{\alpha+\beta\sqrt{2},(\alpha,\beta)\in\mathbf{Q}^2\right\},$$

$$\mathbf{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)=\left\{\alpha+\beta\sqrt{2}+\gamma\sqrt{3}+\delta\sqrt{6},(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbf{Q}^4\right\},$$

$$\mathbf{Q}(i)=\left\{\alpha+\beta i,(\alpha,\beta)\in\mathbf{Q}^2\right\}.\ \mathbf{R}(i)=\left\{\alpha+\beta i,(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2\right\}=\mathbf{C},$$

2) إذا كان L تمديدا لـ K فإنه يمكن اعتبار L فضاء شعاعيا على K بالنسبة إلى الجمع في L واقتصار الضرب في L على $K\times L$.

بُعد L على K يسمى درجة التمديد $K\subset L$ والتي يشار إليها بـ $[L:K]$.

لدينا، على سبيل المثال، $\left\{1,\sqrt{2}\right\}$ أساس على $\mathbf{Q}$ لـ $\mathbf{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ و $\left[\mathbf{Q}\left(\sqrt{2}\right):\mathbf{Q}\right]=2$.

أما $\left\{1,\sqrt{3}\right\}$ فهو أساس على $\mathbf{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ لـ $\mathbf{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$. ومنه يأتي $\left[\mathbf{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right):\mathbf{Q}\left(\sqrt{2}\right)\right]=2$.

إذا كانت K، L، M ثلاثة حقول بحيث $K\subset L$ و $L\subset M$ فإن

$$[M:K]=[M:L].[L:K].$$

مثال آخر :

$$\left[\mathbf{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right):\mathbf{Q}\right]=\left[\mathbf{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right):\mathbf{Q}\left(\sqrt{2}\right)\right].\left[\mathbf{Q}\left(\sqrt{2}\right):\mathbf{Q}\right]=2.2=4.$$

3) ليكن $K\subset L$ وليكن α عنصرا من L. نقول إن α جبري على K إذا وُجد كثير حدود $P(X)$، $P(X)\in K[X]$، بحيث يكون $P(\alpha)=0$. إذا لم يكن α جبريا على K نقول إنه متسام على K.

على سبيل المثال، العدد $\sqrt{2}$ جبري على $\mathbf{Q}$ لأنه صفر لكثير الحدود X^2-2. والعدد i جبري على $\mathbf{Q}$ وعلى $\mathbf{R}$ لأنه صفر لكثير الحدود X^2+1.

عدد نيبير e متسام على $\mathbf{Q}$ (هيرميت 1873). وكذلك الحال بالنسبة إلى عدد أرخميدس π (ليندمان 1882).

4) ليكن $K\subset L$ وليكن α عنصرا من L جبريا على K. يوجد كثير حدود وحيد $P(X)$ من $K[X]$ بحيث يكون :

- $P(\alpha)=0$؛
- $P(X)$ غير قابل للاختزال على $K[X]$؛
- $P(X)$ واحدي، أي أن معامل حده ذي الدرجة الأعلى يساوي عنصر الوَحدة 1 في K.

كثير الحدود هذا يسمى كثير الحدود الأصغر لـ α على K، وهو يقسم كل كثير حدود من $K[X]$ لكون α صفرا له.

إذا كانت درجة $P(X)$ تساوي n نقول إن α جبري درجته n على K. لدينا حينئذ $[K(\alpha):K]=n$.

5) ليكن $K\subset L$. مجموعة عناصر L الجبرية على K حقل جزئي من L يحوي K.

نرمز بـ $\mathscr{A}$ إلى حقل الأعداد الحقيقية الجبرية على $\mathbf{Q}$.

في سنة 1873 بيّن ريشارد ديديكيند أن الحقل $\mathscr{A}$ قابل للعد. نلاحظ أن $\mathscr{C}\subset\mathscr{A}$ يستلزم أن $\mathscr{C}$ قابل للعد.

2.1. نتيجة ڤانتزل

نرمز بـ $M(x,y)$ إلى النقطة التي إحداثياها في المعلم $(O;I,J)$ هما x و y.

1.2.1. توطئة

ا) إذا كان المستقيم D من المستوي الإقليدي $\mathscr{P}$ يشمل النقطتين $A(a_1,a_2)$ و $B(b_1,b_2)$ فإن لهذا المستقيم معادلة من الشكل

$$\alpha x+\beta y+\gamma=0$$

حيث α، β، γ تنتمي إلى $\mathbf{Q}(a_1,a_2,b_1,b_2)$.

ب) لتكن $A(a_1,a_2)$، $B(b_1,b_2)$، $C(c_1,c_2)$ ثلاث نقط من $\mathscr{P}$، للدائرة التي مركزها A ونصف قطرها BC معادلة من الشكل

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0$$

حيث α، β، γ تنتمي إلى $\mathbf{Q}(a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2)$.

الإثبات

ا) إذا كان $a_1=b_1$ فالمستقيم D ممثل بالمعادلة $x-a_1=0$.
إذا كان $a_1\neq b_1$ فالمستقيم D ممثل بالمعادلة

$$y-a_2=\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}(x-a_1)$$

والتي تأخذ الشكل $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ حيث α، β، γ تنتمي إلى $\mathbf{Q}(a_1,a_2,b_1,b_2)$.

ب) الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها BC تمثلها المعادلة

$$(x-a_1)^2+(y-a_2)^2=(c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0$$

حيث α، β، γ تنتمي إلى $\mathbf{Q}(a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2)$.

2.2.1. مبرهنة

يكون العدد الحقيقي r قابلا للإنشاء إذا وفقط إذا وُجد عدد صحيح $1\leq p$ ومتتالية من الحقول الجزئية L_1، L_2، ...، L_p من $\mathbf{R}$ بحيث

1) $L_1=\mathbf{Q}$؛
2) من أجل $1\leq j\leq p-1$، $L_j\subset L_{j+1}$ و $[L_{j+1}:L_j]=2$؛
3) $r\in L_p$.

الإثبات

▸ إذا كان r قابلا للإنشاء فإنه فاصلة لنقطة M من محور الفواصل.

لتكن $M_1=O$، $M_2=I$، ...، $M_n=M$ النقط المتتالية المستعملة للحصول على النقطة M.

من أجل $1\leq j\leq n$، نرمز بـ x_j و y_j لإحداثيي النقطة M_j. لدينا إذن
$(x_1,y_1)=(0,0)$، $(x_2,y_2)=(1,0)$، $x_n=r$.

نضع

$$K_1=\mathbf{Q}(x_1,y_1)$$
$$K_2=\mathbf{Q}(x_1,y_1,x_2,y_2)$$
$$\vdots$$
$$K_j=\mathbf{Q}(x_1,y_1,\ldots,x_j,y_j)$$
$$\vdots$$
$$K_n=\mathbf{Q}(x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n).$$

لدينا

$K_1\subset K_2\subset\ldots\subset K_n$، $K_1=K_2=\mathbf{Q}$، $x_n\in K_n$ و $r=x_n$.

نؤكد أنه من أجل $1\leq j\leq n-1$، يكون $K_j=K_{j+1}$ أو $[K_{j+1}:K_j]=2$.

لنستدل على ذلك بالاستقراء.

الادعاء صحيح من أجل $j=1$ لأن $K_1=K_2=\mathbf{Q}$.

نفرض أن $2 \le j$. تُطرح ثلاث حالات بالنسبة إلى النقطة M_{j+1}، تبعا لكونها نقطة تلاقي مستقيمين، مستقيم ودائرة، أو دائرتين، والمعرّفة في كل الحالات انطلاقا من النقط M_1، ...، M_j.

نعلم من التوطئة السابقة، أن لهذه المستقيمات والدوائر معادلات معاملاتها في $K_j = \mathbf{Q}(x_1, y_1, \ldots, x_j, y_j)$.

1) إذا كانت M_{j+1} نقطة تلاقي مستقيمين فإن (x_{j+1}, y_{j+1}) حل لجملة من الشكل

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0 \end{cases}$$

حيث α، β، γ، α'، β'، γ' عناصر من K_j. عند حلّ هذه الجملة نلاحظ أن x_{j+1} و y_{j+1} ينتميان هما أيضا إلى K_j. ومنه

$$K_{j+1} = K_j\left(x_{j+1}, y_{j+1}\right) = K_j.$$

2) إذا كانت M_{j+1} نقطة تلاقي مستقيم ودائرة فإن (x_{j+1}, y_{j+1}) حل لجملة من الشكل

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ x^2 + y^2 - 2\alpha' x - 2\beta' y + \gamma' = 0 \end{cases}$$

حيث α، β، γ، α'، β'، γ' عناصر من K_j.

* إذا كان $\beta \neq 0$ فإن $y = -\frac{1}{\beta}(\alpha x + \gamma)$. وباستبدال $-\frac{1}{\beta}(\alpha x + \gamma)$ بـ y في المعادلة الثانية للجملة نحصل على معادلة من الدرجة الثانية معاملاتها في K_j و x_{j+1} أحد حليها.

▸ إذا كان $x_{j+1} \in K_j$ فإن $y_{j+1} \in K_j$ و $K_j = K_{j+1}$.

▸ إذا كان $x_{j+1} \notin K_j$ فإن x_{j+1} جبري على K_j، درجته 2 ولدينا:

$$K_{j+1} = K_j\left(x_{j+1}, y_{j+1}\right) = K_j\left(x_{j+1}\right) \text{ و } \left[K_{j+1} : K_j\right] = 2.$$

* إذا كان $\beta = 0$ فإن $\alpha \neq 0$؛ نتصرف بنفس الطريقة مع "معادلة التراتيب" الناتجة.

3) إذا كانت M_{j+1} نقطة تلاقي دائرتين فإن (x_{j+1}, y_{j+1}) حل لجملة من الشكل

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0 \\ x^2 + y^2 - 2\alpha' x - 2\beta' y + \gamma' = 0 \end{cases}$$

حيث α، β، γ، α'، β'، γ' عناصر من K_j. هذه الجملة مكافئة للجملة

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0 \\ 2(\alpha - \alpha')x + 2(\beta - \beta')y - (\gamma - \gamma') = 0. \end{cases}$$

وهكذا نتحول إلى الحالة السابقة.

استطعنا إذن إنشاء متتالية من الحقول الجزئية من $\mathbf{R}$:

$$K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n$$

بحيث $K_1 = \mathbf{Q}$، $r \in K_n$، ومن أجل $n-1 \ge j \ge 1$، $K_j = K_{j+1}$ أو $\left[K_{j+1} : K_j\right] = 2$.

يمكن تحويل هذه المتتالية إلى متتالية متزايدة تماما بحذف الحقول "الزائدة" للحصول على متتالية

$$L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_p$$

حيث $L_1 = \mathbf{Q}$، $r \in L_p$، ومن أجل $p-1 \ge j \ge 1$، $\left[L_{j+1} : L_j\right] = 2$.

▸ في المقابل نفرض وجود متتالية من الحقول الجزئية من $\mathbf{R}$

$$L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_p$$

تحقق شروط المبرهنة. نثبت بالاستقراء على j، $p \geq j \geq 1$، أن $L_j \subset \mathscr{C}$. ومنه يأتي أن r عدد قابل للإنشاء.

- لدينا $L_1 \subset \mathscr{C}$ لأن $L_1 = \mathbf{Q}$ و $\mathbf{Q} \subset \mathscr{C}$.

- نفرض $L_j \subset \mathscr{C}$. ولنثبت أن $L_{j+1} \subset \mathscr{C}$. ليكن α عنصرا من L_{j+1}، لنثبت أن α ينتمي إلى $\mathscr{C}$.

العناصر 1، α، α^2 مرتبطة خطيا على L_j لأن $\left[L_{j+1} : L_j\right] = 2$. يوجد إذن a، b، c من L_j، ليست جميعا منعدمة، بحيث $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$.

إذا كان $a = 0$ فإن $\alpha = -\dfrac{c}{b}$ أي $\alpha \in L_j$. ومنه $\alpha \in \mathscr{C}$.

إذا كان $a \neq 0$ فإن $\alpha = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. ومنه $\alpha \in \mathscr{C}$ لأن الحقل $\mathscr{C}$ مستقر بالنسبة إلى الجذر التربيعي.

مبرهنة ڤانتزل الموالية هي نتيجة للمبرهنة السابقة.

3.2.1. مبرهنة ڤانتزل

كل عدد حقيقي قابل للإنشاء جبري على $\mathbf{Q}$ ودرجته قوة للعدد 2.

الإثبات

ليكن r عددا حقيقيا قابلا للإنشاء. تبعا للمبرهنة السابقة توجد متتالية من الحقول الجزئية من $\mathbf{R}$

$$L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_p$$

بحيث $L_1 = \mathbf{Q}$، $r \in L_p$، ومن أجل $p-1 \geq j \geq 1$، $\left[L_{j+1} : L_j\right] = 2$.

وبناء على خاصة متعلقة بدرجات تمديدات الحقول أشيرَ إليها سابقا، لدينا

$$\left[L_p : \mathbf{Q}\right] = \left[L_p : L_{p-1}\right] \times \left[L_{p-1} : L_{p-2}\right] \times \ldots \times \left[L_2 : \mathbf{Q}\right] = 2^{p-1}.$$

لدينا أيضا $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(r) \subset L_p$، ومنه

$$2^{p-1} = \left[L_p : \mathbf{Q}\right] = \left[L_p : \mathbf{Q}(r)\right] \times \left[\mathbf{Q}(r) : \mathbf{Q}\right].$$

نستخلص من ذلك أن $\left[\mathbf{Q}(r) : \mathbf{Q}\right]$ قاسم لـ 2^{p-1} وهو من أجل ذلك قوة للعدد 2 وليكن 2^q.

لتكن العناصر 1، r، r^2، ...، r^{2^q}. هذه العناصر مرتبطة خطيا في الفضاء الشعاعي $\mathbf{Q}(r)$. يوجد إذن $2^q + 1$ عنصرا λ_0، λ_1، ...، λ_{2^q} من $\mathbf{Q}$ بحيث

$$\lambda_0 + \lambda_1 r + \ldots + \lambda_{2^q} r^{2^q} = 0.$$

وهذا دليل على أن r جبري على $\mathbf{Q}$ درجته $\left[\mathbf{Q}(r) : \mathbf{Q}\right] = 2^q$.

4.2.1. ملحوظة

مبرهنة ڤانتزل تعطي شرطا لازما وليس كافيا لقابلية الإنشاء.

على سبيل المثال فإن $P(X) = X^4 - X - 1$ غير قابل للاختزال على $\mathbf{Q}[X]$ ويقبل جذرا حقيقيا α غير قابل للإنشاء (يان ستوارت)، بيد أن α جبري درجته $4 = 2^2$ على $\mathbf{Q}$ (المرجع 2، الصفحة 39).

2. تمييز الحقل C

الحقل $\mathscr{C}$ هو أصغر حقل جزئي لـ $\mathbf{R}$ مستقر بالجذر التربيعي.

لقد سبق أن رأينا أن حقل الأعداد القابلة للإنشاء $\mathscr{C}$ مستقر بالنسبة إلى الجذر التربيعي. نبين الآن أنه إذا كان K حقلا جزئيا من $\mathbf{R}$ مستقرا بالنسبة إلى الجذر التربيعي فإن $K \subset \mathscr{C}$.

ليكن r عنصرا من $\mathscr{C}$. نعلم من مبرهنة سابقة أنه توجد متتالية من الحقول الجزئية من $\mathbf{R}$

$$L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_p$$

بحيث $L_1 = \mathbf{Q}$، $r \in L_p$، ومن أجل $p-1 \geq j \geq 1$، $\left[L_{j+1} : L_j\right] = 2$.

لإثبات أن $r \in K$ يكفي الاستدلال بالاستقراء على j أنه من أجل $p \geq j \geq 1$، $L_j \subset K$.

الإثبات مماثل للذي ورد بشأن المبرهنة المشار إليها أعلاه حيث يستبدل K بـ $\mathscr{C}$.

تُستخلَص من ذلك النتيجة الآتية:

يتم الحصول على كل الأعداد القابلة للإنشاء انطلاقا من عناصر من $\mathbf{Q}$ وباستعمال العمليات $+$، $-$، $\times$، $:$ و $\sqrt{\ }$.

بل يكفي الانطلاق من العددين 0 و 1.

1.2. ملحوظة

الاحتواءات

$$\mathbf{Q} \subset \mathscr{C}, \quad \mathscr{C} \subset \mathscr{A}, \quad \mathscr{A} \subset \mathbf{R}$$

فعلية أو تامة. لدينا على سبيل المثال،

$\sqrt{2} \in \mathscr{C}$ و $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$؛ $\sqrt[3]{2} \in \mathscr{A}$ و $\sqrt[3]{2} \notin \mathscr{C}$، $\pi \in \mathbf{R}$ و $\pi \notin \mathscr{A}$.

3. الإجابة عن تساؤلات اليونانيين الثلاثة

1.3. تربيع الدائرة

المطلوب في هذه المسألة هو إنشاء مربع مساحته تساوي مساحة قرص معين.

يمكن افتراض أن نصف قطر القرص يساوي 1، أي أن مساحته تساوي π. المطلوب هو إذن إنشاء نقطة A من محور الفواصل، باستعمال المسطرة والبيكار بحيث يكون $OA = \sqrt{\pi}$. يعني ذلك أن النقطة A قابلة للإنشاء ثم أن $\sqrt{\pi}$ قابل للإنشاء، ثم أخيرا أن π قابل للإنشاء، وهذا يناقض نتيجة ليندمان.

2.3. تضعيف المكعب

هل يمكن باستعمال المسطرة والبيكار إنشاء مكعب حجمه ضعف مكعب معين؟

نفترض أن ضلع المكعب يساوي OI. المطلوب هو إذن إنشاء مكعب حجمه 2 أي طول ضلعه يساوي $\sqrt[3]{2}$، وهذا غير ممكن بالمسطرة والبيكار كون $\sqrt[3]{2}$ غير قابل للإنشاء.

3.3. تثليث الزاوية

مسألة تثليث الزاوية تعني إنشاء النقطة التي إحداثياها $(\cos(\alpha/3), \sin(\alpha/3))$، انطلاقا من نقطة دائرة الوَحدة التي إحداثياها $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. نظرا إلى أن

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

فإن $2\cos(\alpha/3)$ صفر لكثير الحدود

$$X^3 - 3X - 2\cos\alpha.$$

وهكذا تكون درجة $\cos(\alpha/3)$ على الحقل $\mathbf{Q}(\cos\alpha)$ أصغر من 3 أو تساويه. في هذه الحالة، تتعلق قابلية الإنشاء بالدرجتين 1 و 2. ومنه المبرهنة الآتية.

1.3.3. مبرهنة (تثليث الزاوية)

ليكن α عددا حقيقيا. يكون العدد $\cos(\alpha/3)$ قابلا للإنشاء بالمسطرة والبيكار، انطلاقا من المجموعة $\{0,1,\cos\alpha\}$، إذا وفقط إذا كان كثير الحدود $X^3 - 3X - 2\cos\alpha$ قابلا للاختزال على $\mathbf{Q}(\cos\alpha)$.

بتعبير آخر، لتكن النقطة M من دائرة الوحدة بحيث

$$\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right) = \alpha\,(\text{mod}.2\pi).$$

نقول إن α قابلة للتثليث إذا كانت النقطة N من دائرة الوحدة بحيث

$$\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}\right) = \frac{\alpha}{3}(\text{mod}.2\pi)$$

قابلة للإنشاء. هذا الإنشاء ليس على العموم ممكنا. لنأخذ على سبيل المثال $\alpha = \frac{\pi}{3}$. لو كانت N قابلة للإنشاء لكان مسقطها H على محور الفواصل قابلا للإنشاء ولكان $\overline{OH} = \cos\frac{\pi}{9}$ قابلا للإنشاء. في حين أن $\cos\frac{\pi}{9}$ صفر لكثير الحدود $8X^3 - 6X - 1$ غير القابل للاختزال على $\mathbf{Q}$، لأنه لدينا بالفعل

$$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \Re e\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)^3 = 4\cos^3\frac{\pi}{9} - 3\cos\frac{\pi}{9}.$$

إذن $\cos\frac{\pi}{9}$ جبري درجته 3 على $\mathbf{Q}$، وهو في النهاية غير قابل للإنشاء.

4. إنشاء المضلعات المنتظمة

نذكر أن قابلية إنشاء المضلع المنتظم ذي السبعة عشرة ضلعا قد تم إثباتها من طرف ڤاوس سنة 1796.

بصورة عامة لدينا النتيجة الآتية.

1.4. مبرهنة (إنشاء المضلعات المنتظمة)

يكون مضلع منتظم ذو n ضلعا قابلا للإنشاء بالمسطرة والبيكار إذا وفقط إذا كان n جداءً لقوةٍ للعدد 2 ولأعدادٍ لـ فيرما أولية مختلفة.

لنذكّر أن أعداد فيرما الأولية هي أعداد من الشكل $F_m = 2^{2^m} + 1$ أولية. حتى الآن لا يُعرَف منها سوى $F_0 = 3$، $F_1 = 5$، $F_2 = 17$، $F_3 = 257$، $F_4 = 65537$.

يمكن تقسيم الدائرة إلى n قوسا متقايسا إذا وفقط إذا كان n جداء لقوة للعدد 2 ولأعدادٍ لـ فيرما أولية مختلفة. ولدينا نتيجة مشابهة بالنسبة لفتيلة lemniscate برنولي.

المراجع

1. Mahdi Abdeldjaouad : Nombre constructibles, Miftah Al Hissab, No 69, Juin 1985, Association Tunisienne des Sciences Mathématiques.
2. Jean-Claude Carrega : Théorie des corps, La règle et le compas, Hermann, 1989.
3. R. & A. Douady : Algèbre et théories galoisiennes, Tome 2, Théories galoisiennes, CEDIC/Fernand Nathan, 1979.
4. Jean-Pierre Escofier : Théorie de Galois, 2e édition, Dunod, 2000.
5. Henri Lebesgue : Leçons sur les constructions géométriques, Jacques Gabay 1987.
6. Marc Reversat & Benoît Zhang : Cours de théorie des corps, Université Paul Sabatier de Toulouse, 24 mars 2003.