تقديم مجموعات الأعداد الشهيرة باستعمال الطريقة البنائية

عبد الرشيد سعدي
أستاذ بقسم الرياضيات، جامعة محمد بوضياف، المسيلة
abderrachid.saadi@univ-msila.dz

1. تقديم

تعتبر مجموعات الأعداد الشهيرة من بين أبرز ما يتلقاه الدارس في المراحل الأولى من تعلّمه للرياضيات. كما أنه لا يُستغنى عنها في العديد من فروع العلوم، سواء منها ما كان في العلوم التجريدية، أو التكنولوجية، أو البيولوجية، وحتى العلوم الإنسانية.

يستدعي ذلك من الرياضياتيين البحث عن الطرق الممكنة لتقديمها حسب الاختصاصات والمستويات المختلفة. وقد ارتأينا في هذا المقام تقديم هذه المجموعات من وجهة نظر بنائية متعلّقة بتسلسل المفاهيم الرياضية وفق نسق غير متناقض.

لقد اهتم الرياضياتيون في نهاية القرن التاسع عشر وبداية القرن العشرين بتأصيل مجموعة من المفاهيم الرياضية على خطى طريقة أقليدس (Euclide) في كتابه الأصول. فعلى سبيل المثال، نجد أعمال بيانو Peano وديديكيند Dedekind حول مجموعات الأعداد. كما اقترحت إحدى مسائل هيلبرت Hilbert معالجة إشكالات قائمة في بناء مجموعة الأعداد الطبيعية المقترحة من قِبل بيانو.

نقدّم فيما يلي نموذجا عن بناء مفهوم، وهو مفهوم العدد وفق المعايير التالية:

البنى الجبرية: ونقصد هنا البنى الجبرية الناتجة عن العمليتين الأساسيتين (الجمع والضرب).

علاقة الترتيب: وهي العلاقة المشهورة $\leq$.

المترية: أي أن مجموعة الأعداد تتمتع بقبولها للمسافة بين عناصرها.

2. مجموعة الأعداد الطبيعية

إقترح بيانو جملة من المسلمات لإنشاء مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$، وهي:

أولا: 1 عدد طبيعي.

ثانيا: من أجل كل عدد طبيعي n يوجد عدد طبيعي وحيد نرمز له بالرمز n^* ونسميه عاقب n.

ثالثا: من أجل كل عدد طبيعي n فإن $n^* \neq 1$.

رابعا: من أجل كل عددين طبيعيين m و n ، إذا كان $n^* = m^*$ فإن $n = m$.

خامسا (مسلمة التراجع): إذا وُجدت مجموعة جزئية E من $\mathbb{N}$ تحوي العدد 1 وكلّما انتمى عدد طبيعي n للمجموعة E فإن عاقبه ينتمي لـ E، فإن هذه المجموعة ليست إلا مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.

نلاحظ ما يلي:

- في المسلمة الأولى، تمّ اعتبار بداية الأعداد الطبيعية هو 1 (يمكنك مراجعة [4])، بينما هناك مدرسة أخرى تعتبر بداية الأعداد الطبيعية هي 0 (يمكنك مراجعة [5]).
- يمكن تعويض المسلمات الثانية والثالثة والرابعة بما يلي: "يوجد تطبيق غامر * من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{N}\backslash\{1\}$ يرفق بكل عدد طبيعي عاقبه" (يمكنك مراجعة [5]).

ستكون هذه المسلمات انطلاقة لتعيين مجموعة من الخواص والمفاهيم المرتبطة بالأعداد الطبيعية، والذي يهمنا من ذلك هنا هو ما يلي:

البنى الجبرية

يُعرّف الجمع والضرب بطريقة تراجعية كما يلي:

- حاصل جمع 1 مع أي عدد طبيعي هو عاقبه $(n+1=n^*)$، كما أن عاقب مجموع عددين طبيعيين هو حاصل جمع أحدهما مع عاقب الآخر $(n+m^*=(n+m)^*)$.
- الواحد 1 عنصر حيادي في الضرب $(n.1=n)$، ولدينا: $n.m^*=n.m+n$.

إن الجمع والضرب عمليتان داخليتان في $\mathbb{N}$، تبديليتان وتجميعيتان. كما أن الضرب عملية توزيعية على الجمع. نقول إن الثنائية $(\mathbb{N},.)$ تتمتع ببنية نصف زمرة.

علاقة الترتيب

نُعرّف علاقة الترتيب $\leq$ في مجموعة الأعداد الطبيعية كما يلي:

من أجل كل عددين طبيعيين n,m نقول إن $n\leq m$ إذا وفقط إذا كان $n=\mathrm{m}$ أو وجد عدد طبيعي p بحيث $n+p=m$.

العلاقة $\leq$ هي علاقة ترتيب كلي في مجموعة الأعداد الطبيعية.

المترية

يمكننا تعريف المسافة بين عددين طبيعيين على أنها الفرق بين أكبرهما وأصغرهما.

نستطيع تعريف مجموعات مشاكلة لمجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ مستخدمين رموزا مختلفة لعناصرها:

$$\mathbb{N}=\{1,1^*,(1^*)^*,\cdots\}=\{1,2,3,\cdots\}=\{I,II,III,\cdots\}...$$

3. مجموعة الأعداد الصحيحة

في مجموعة الأعداد الطبيعية، لا تقبل المعادلة $x+a=b$ حلا إلا إذا كان a أقل تماما من b.

يمكن أن يكون العدد الطبيعي x حلا لعدة معادلات، فإذا فرضنا أنه حل للمعادلة

$$x+m=n$$

وللمعادلة

$$x+q=p$$

فإنه لدينا $n-m=p-q$. مما ينتج عنه $n+q=p+m$. على ضوء هذا نُعرّف في $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ علاقة التكافؤ $\sim$ التالية: من أجل كل ثنائيتين طبيعيتين (n,m)و(p,q) نقول إنّ $(n,m)\sim(p,q)$ إذا وفقط إذا كان

$$n+q=p+m.$$

نرمز لصفّ تكافؤ العنصر (n,m) بالرمز $[n,m]$ ونسمّيه عددا صحيحا، كما نرمز بـ $\mathbb{Z}$ لمجموعة الأعداد الصحيحة. وفيما يلي ترميزات ومسمّيات أخرى:

- نرمز بـ 0 لصف التكافؤ $[n,n]$ ونسميه الصفر.
- نرمز بـn لصف التكافؤ $[n+1,1]$ ونسمّيه عددا موجبا. وبصفة عامة، نسمّي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة المجموعة التالية $\mathbb{Z}^+=\{[n,m],n,m\in\mathbb{N},n>m\}$ ، وهي مجموعة الأعداد الطبيعية نفسها.

- نرمز بـ $-n$ لصف التكافؤ $[1, n+1]$، ونسمّيه عددا سالبا. بصفة عامة، نسمّي مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة المجموعة التالية $\mathbb{Z}^- = \{[n, m], n, m \in \mathbb{N}, n < m\}$.
- يُرمز لمجموعة الأعداد الصحيحة غير المعدومة بالرمز $\mathbb{Z}^*$.

البنى الجبرية

نُعرّف الجمع والضرب في مجموعة الأعداد الصحيحة بالطريقة ذاتها التي يُعرّفان بها في مجموعة حاصل القسمة (مجموعة أصناف التكافؤ). ويعتبران بذلك تمديدا لهاتين العمليتين في $\mathbb{N}$، مما يُكسب الثنائية بنية $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة تبديلية، والثلاثية $(\mathbb{Z}, +, .)$ بنية حلقة تبديلية واحدية.

علاقة الترتيب

نُعرّف علاقة الترتيب $\leq$ في مجموعة الأعداد الصحيحة بالطريقة ذاتها التي تمّ تعريفها في مجموعة الأعداد الطبيعية.

العلاقة $\leq$ هي علاقة ترتيب كلي في مجموعة الأعداد الصحيحة.

المترية

تُعرّف القيمة المطلقة لعدد صحيح بأنها مسافته إلى الصفر، وهي الفرق الموجب بين العدد وبين الصفر. أما المسافة بين عددين صحيحين فهي القيمة المطلقة للفرق بينهما.

4. مجموعة الأعداد الناطقة

في مجموعة الأعداد الصحيحة، لا تقبل المعادلة $a.x = b$ (حيث a عدد صحيح غير معدوم) حلا إلا إذا كان a يقسم b.

يمكن أن يكون العدد الصحيح x حلا لعدة معادلات، فإذا فرضنا أنه حل للمعادلة $m.x = n$ والمعادلة $q.x = p$. عندئذ يكون $n/m = p/q$، مما ينتج عنه $n.q = p.m$ (ناتج جداء الطرفين يساوي ناتج جداء الوسطين).

واستنادا إلى ما سبق يمكننا أن نعرف في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ علاقة التكافؤ $\sim$ التالية:

من أجل كل ثنائيتين صحيحتين (n, m) و (p, q) نقول إن $(n, m) \sim (p, q)$ إذا وفقط إذا كان $n.q = p.m$.

نرمز لصف تكافؤ العنصر (n, m) بالرمز $\frac{n}{m}$ ونسميه عددا ناطقا (نختار الممثّل غير القابل للاختزال، أي الذي يجعل القاسم المشترك الأكبر للعددين (n, m) يساوي 1. كما نرمز بـ $\mathbb{Q}$ لمجموعة الأعداد الناطقة.

تحوي مجموعة الأعداد الناطقة مجموعة الأعداد الصحيحة ولدينا $\mathbb{Z} = \{\frac{n}{1}, n \in \mathbb{Z}\}$.

البنى الجبرية

يُعرّف الجمع والضرب عن طريق أصناف التكافؤ كما يلي: من أجل كل عددين ناطقين $[n, m]$ و $[p, q]$ فإنّ

$[n, m] + [p, q] = [n.q + m.p, m.q]$ و $[n, m].[p, q] = [n.p, m.q]$.

يمكن ملاحظة أنه باستعمال الرمز المألوف للكسور سنحصل على مجموع وجداء كسرين كما تعلّمناه في المرحلة الابتدائية والمتوسطة (بعد اختيار الممثّل عن طريق الاختزال).

تمثّل الثنائية $(\mathbb{Q}, +)$ بنية زمرة تبديلية، والثلاثية $(\mathbb{Q}, +, .)$ تمثل بنية حلقة تبديلية واحدية؛ كما تمثل حقلا تبديليا.

علاقة الترتيب

نُعرّف علاقة الترتيب $\leq$ في مجموعة الأعداد الناطقة بالطريقة ذاتها التي تمّ تعريفها في مجموعة الأعداد الصحيحة.

إن العلاقة $\leq$ هي علاقة ترتيب كلي في مجموعة الأعداد الناطقة.

المترية

يتم تمديد تعرف القيمة المطلقة والمسافة بسهولة إلى مجموعة الأعداد الناطقة.

الجذر التربيعي

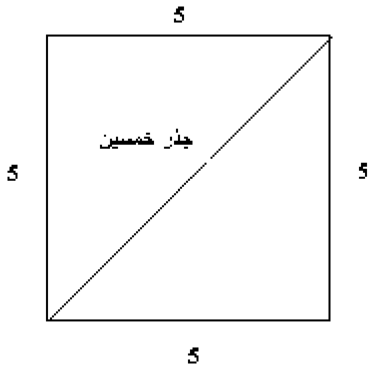
نقول إن العدد الناطق a يقبل جذرا تربيعيا إذا وجد عدد ناطق موجب أو معدوم b يحقق $b^2 = a$.

نرمز للجذر التربيعي للعدد الناطق a بالرمز $\sqrt{a}$.

5. مجموعة الأعداد الحقيقية

يمكن إثبات أنه توجد أعداد ناطقة موجبة لا تقبل جذرا تربيعيا (حالة العدد 2 مثلا)، رغم أنّ نظرية فيثاغورس تشير إلى أن وجود هذا العدد ممكن، وذلك بأخذ مثلث قائم متساوي الساقين طول ضلعه القائم هو 1، فيكون طول وتره هو حل المعادلة المذكورة والذي سنرمز له بالرمز $\sqrt{2}$. لقد انتبه القدماء إلى وجود هذا النوع من الأعداد، والتي سيتم توسيعها إلى مجموعة تسمى مجموعة الأعداد الصماء.

وهذه قطعة من كتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة لمحمد بن موسى الخوارزمي:



ومثال ذلك أرض مربعة من كل جانب خمسة أذرع، تكسيرها خمسة وعشرون وهذه صورتها :

الجذر التربيعي عند الخوارزمي

تسمى المجموعة المشكلة من الأعداد الناطقة والأعداد الصماء مجموعة الأعداد الحقيقية. ولإنشائها نستعمل طرقا مختلفة، منها:

- استعمال المتتاليات الكوشية في مجموعة الأعداد الناطقة، والتي تتقارب إلى أعداد حقيقية. هذا الأمر ناجم عن خاصية طبولوجية، وهي كثافة مجموعة الأعداد الناطقة في مجموعة الأعداد الحقيقية، والتي تسمح بتقريب عدد حقيقي بمتتالية من الأعداد الناطقة.
- استعمال مقاطع ديدكيند: نسمي مقطعا في $\mathbb{Q}$ كل مجموعة غير خالية C تتمتع بالخاصيتين التاليتين:

أ. إذا كان $c \in C$ وكان $a \in \mathbb{Q}$ محققا $a < c$ فإن $a \in C$.

ب. من أجل كل $c \in C$ يوجد $b \in C$ بحيث $b > c$.

نسمي مجموعة الأعداد الحقيقية مجموعة المقاطع المعرفة أعلاه، ونرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$، وهي مجموعة تحوي مجموعة الأعداد الناطقة.

البنى الجبرية

يتم تمديد الجمع والضرب إلى مجموعة الأعداد الحقيقية بحيث تُمثّل الثنائية $(\mathbb{R}, +)$ بنية زمرة تبديلية، وتُمثّل الثلاثية $(\mathbb{R}, +, .)$ بنية حلقة تبديلية واحدية، وتمثل أيضا حقلا تبديليا.

علاقة الترتيب

نُعرّف علاقة الترتيب $\leq$ في مجموعة الأعداد الحقيقية بالطريقة ذاتها التي تمّ تعريفها في مجموعة الأعداد الناطقة، وهي علاقة ترتيب كلي أيضا.

المترية

يتم تمديد تعريف القيمة المطلقة والمسافة بسهولة إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

الجذر التربيعي

كل عدد حقيقي موجب أو معدوم a يقبل جذرا تربيعيا وحيدا هو العدد الحقيقي الموجب أو المعدوم b الذي يحقق $b^2 = a$. نرمز للجذر التربيعي للعدد الحقيقي a بالرمز $\sqrt{a}$.

6. مجموعة الأعداد العُقَديّة (المركبّة)

اهتم الرياضياتي الإيطالي كاردانو Cardan في االقرن السادس عشر الميلادي بالمسألة التالية: هل يمكن إيجاد عددين مجموعهما يساوي 10 وجداؤهما يساوي 40؟ يقودنا هذا الطرح إلى المعادلة $\left(\frac{x-5}{\sqrt{15}}\right)^2 = -1$. ويؤول حلّ هذه المسألة إلى إيجاد الجذور التربيعية للعدد السالب (-1)، وهو ما اعتبر آنذاك غامضا وغير مجد. وفي ذلك الوقت ظهرت تسمية العدد التخيلي.

بقي الأمر على هذا النحو إلى أن اهتدى غوص Gauss إلى أنه يمكن اعتبار الأعداد المركبة نقاطا للمستوي الأقليدي. فباعتبار أن المستوي مزوّد بمعلم متعامد ومتجانس، وبمراعاة التقابل بين المستوي والمجموعة $\mathbb{R}^2$ يمكننا أن نعطي التعريف الموالي:

- نسمي عددا عُقديا كل ثنائية $z = (x, y)$ حيث x و y عددان حقيقيان.
- نرمز لمجموعة الأعداد العُقدية (المركبة) بالرمز $\mathbb{C}$.
- يسمى العدد x الجزء الحقيقي للعدد z ونرمز له بالرمز $Re(z)$.
- نطابق بين كل عدد حقيقي x وبين الثنائية $(x, 0)$، مما يعني أن مجموعة الأعداد العقدية تحوي مجموعة الأعداد الحقيقية.
- يسمى العدد y الجزء التخيلي للعدد z، ونرمز له بالرمز $Im(z)$.

البنى الجبرية

من أجل كل عددين عقديين $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$، نُعرّف الجمع والضرب كما يلي:

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), z_1.z_2 = (x_1.x_2 - y_1.y_2, x_1.y_2 + x_2.y_1)$.

نقول إن الثنائية$(\mathbb{C},+)$ تمثل بنية زمرة تبديلية، كما نقول إن الثلاثية $(\mathbb{C},+,.)$ تمثل بنية حلقة تبديلية واحدية، وتمثل أيضا حقلا تبديليا.

- نلاحظ أن $-1 = (-1,0) = (0,1).(0,1)$، وهذا يعني أن $(0,1)$ هو أحد الجذور التربيعية لـ(-1)، والذي نرمز له عادة بالرمز i (الجذر التربيعي الآخر هو $-i$).
- استنادا إلى ما سبق يمكننا أن نكتب كل عدد عقدي$z = (x,y)$ على الشكل $z = x + iy$، والذي نسميه الشكل الجبري للعدد العقدي z .
- يسمى العدد العقدي $\bar{z} = x - iy$ مرافق العددz.

علاقة الترتيب

لا يمكن تمديد علاقة الترتيب $\leq$ إلى مجموعة الأعداد العقدية تبقى علاقة ترتيب كلي.

المترية

- نُعرّف طويلة العدد المركب $z = x + iy$ كما يلي $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

وبهذا يمكننا تعريف المسافة بين عددين عقديين على أنها طويلة الفرق بينهما، وهذا ما يتطابق مع المسافة الأقليدية في $\mathbb{R}^2$.

- عمدة عدد عقدي غير معدوم z والتي نرمز لها بالرمز $\arg z$ هو قيس القوس الرئيسي الذي يحقق $\cos\arg z = \frac{Re z}{|z|}$ $\sin\arg z = \frac{Im z}{|z|}$.
- يمكننا أن نكتب العدد z على الشكل $z = |z|(\cos\arg z + i\sin\arg z)$، والذي يسمى الشكل المثلثي للعدد العقدي z. كما يمكننا كتابته على الشكل $z = |z|e^{i\arg z}$، والذي يسمى الشكل الأسي أو شكل أولر Euler.

7. خلاصة

لقد تم تقديم مجموعات الأعداد بطريقة تسلسلية بنائية، تعتمد فيها كل مجموعة أعداد على سابقتها بحيث ينسجم بناؤها مع حل مشكل لا يمكن حله في المجموعة السابقة، وكذلك مراعاة تمديد العمليات والمسافة بطريقة سلسة، والحفاظ على علاقة الترتيب ما أمكن ذلك. نستطيع إيراد الملاحظات التالية:

- هذا النمط التسلسلي لا بد له من بداية، ولذا جاء إنشاء مجموعة الأعداد الطبيعية عن طريق مسلمات أولية. إن هذا الأمر يطرح إشكالا فلسفيا: "هل يمكن أن يشكّل النظام المسلّمي مجموعة كاملة منسجمة بحيث يمكن الاكتفاء بقضاياه من أجل توليد قضايا جديدة وفق مبدأ الاستنتاج الرياضياتي؟

لقد تمّ البتّ في مسألة الاتساق أو الانسجام من قِبل كورت غودل Gödel، حيث ينصّ على أنه لا يمكن أن يكون مثل هذا النسق كاملا. يمكن تفسير ذلك بأن القضايا الأولية تم وضعها اعتمادا على معايير خارجية (كالحواس أو المكتسبات القبلية)، وهذا يعني أنه لا يمكن أن يتم الفصل في صحتها من عدمه وفق برهان مجرّد. يُذكّرنا هذا بإشكال عمّر قرونا، وهو الإشكال المتعلق بالمسلّمة الخامسة لأقليدس، والذي انتهى في نهاية المطاف إلى ظهور هندستين غير أقليديتين (الزائدية والناقصية).

- هناك طرق أخرى تعتمد على التصور في إنشاء مجموعة الأعداد الطبيعية، وعلى التمثيل الهندسي باستعمال المعلم في إنشاء بقية المجموعات. هذه الطرق مفيدة من الناحية التعليمية، حيث يمكن قياس نجاعتها في تقديم مفهوم العدد بأنواعه لتلاميذ المراحل المبكرة من التعليم.

- من البديهي طرح مسألة تمديد مجموعة الأعداد العقدية إلى مجموعة أخرى تتمتع بقبول العمليات والمسافة. يمكن التفكير في بنية الفضاء الشعاعي، لكن هذا سيثير إشكالا حول البنية الجبرية (غياب بنية الحلقة والحقل وتعويضها ببنية الفضاء الشعاعي)، وهذا يعني احتفاظنا بخاصية قبول المسافة فقط. وبهذا نفقد أهم ميزة في العدد، وهي قبول العمليتين الداخليتين: الجمع والضرب.

مراجع

1. أقليدس: الأصول في الهندسة، ترجمة كريثيليوس فان دبك، شيكاغو، 1963.
2. ريمون كوتي: جاك إيزرا، التحليل الرياضي، جزء 1، تعريب يوسف عتيق، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1989.
3. محمد بن موسى الخوارزمي: الجبر والمقابلة، تحقيق علي مصطفى مشرفة ومحمد مرسي أحمد، دار الكاتب العربي للطباعة والنشر، مصر، 1968.
4. Ayres F : Algèbre moderne, Série Schaum, Paris, 1985.
5. Ebbinghaus H. D. *et al*: Numbers, Springer, New York, 1995.