المفاهيم الأولية لحقول الأشعة

حمزة خليف

أستاذ متقاعد

hkhelif@gmail.com

يقدم هذا النص المفاهيم الأولية المبسّطة لحقول الأشعة دون التطرق صراحة إلى البنية التفاضلية للمجموعة الحاضنة. وذلك لأن الموضوع يمثّل ملحقا بدرسيْ التكاملات المنحنية وتكاملات السطح من برنامج السنة الثانية لشهادة الدراسات العليا في الفيزياء.

مقدمة

في كل ما يأتي يرمز $\mathscr{E}$ إلى فضاء تآلفي مرتبط بفضاء شعاعي إقليدي E بعده 3 ومنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\mathscr{R}=\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. يمكن تعميم المفاهيم التي سيتناولها هذا النص إلى فضاء بعده n $(4\leq n)$ كما يمكن اقتصارها على المستوي.

إذا لزم الأمر يُفرض $\mathscr{E}$ مزودا بالطوبولوجيا الاعتيادية.

تُدعى المقادير الفيزيائية المتعلقة بشعاعِ موضعٍ حقولا. فالحرارة المحلية للهواء، على سبيل المثال، هي حقل سلميات والسرعة الوسطى للريح في الجو هي حقل أشعة.

يُميز في الفيزياء نوعان من حقول الأشعة:

- الأشعة القطبية مثل سرعة نقطة مادية، وهي الأشعة الفعلية؛
- الأشعة المحورية (أو شبه الأشعة) مثل السرعة الزاوية لجسم يدور حول محور. نجد في الفيزياء الأشعة المحورية، مثلا، في مفاهيم عزم القوى أو العزم الحركي في الميكانيك ومفهوم الحقل المغناطيسي في الكهرومغناطيسية.

وقد يكون شعاع مركبا من هذين النوعين من الأشعة مثل السرعة الوسطى لمائع متحرك.

الجداء الشعاعي لشعاعين قطبيين هو شعاع محوري. أما التدرج، والتفرق والدوّار (وهي مؤثرات من المرتبة الأولى) فنجدها في ميكانيك الموائع (معادلات نافيي- ستوكس: Navier - Stokes) كما تستعمل في الصياغة الحديثة لمعادلات ماكسويل(Maxwell) وفي كل الفيزياء الرياضياتية أو النظرية.

1. الحقول السلمية

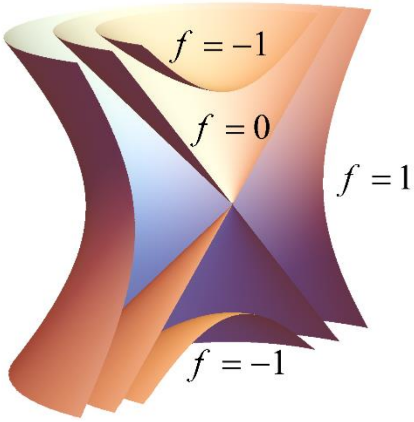
1.1. نسمي حقل سلميات أو حقلا سلميا على جزء Σ من $\mathscr{E}$، كل دالة عددية f معرفة على Σ.

من أجل كل عدد حقيقي c، يسمى السطح المعرف بالمعادلة $f(x,y,z)=c$، سطح تسوية لـ f.

2.1. مثال

$$f:(x,y,z)\mapsto x^2+y^2-z^2$$

وهو شكل لورانتز (Forme de Lorentz) المستعمل في هندسة لورانتز.



سطح التسوية المعرف بالمعادلة $f(x,y,z)=0$ هو مخروط الضوء. كل شعاع (x,y,z) يحقق $f(x,y,z)=0$ يدعى شعاعا ذا نمط ضوئي أو باختصار، شعاعا ضوئيا. كل شعاع (x,y,z) يحقق $f(x,y,z)<0$ يدعى ذا نمط زمني أو شعاعا زمنيا. وكل شعاع (x,y,z) يحقق $f(x,y,z)>0$ يدعى ذا نمط فضائي أو شعاعا فضائيا.

2. حقول الأشعة

1.2. نسمي حقل أشعة على الجزء Σ من $\mathscr{E}$ كل تطبيق $\vec{F}$ من Σ في E.

ليكن $\vec{F}: M \mapsto \vec{F}(M)$ حقل أشعة على Σ : نقول إن الحقل $\vec{F}$ مستمر إذا كان التطبيق $\vec{F}$ مستمرا. وإذا كان الجزء Σ مفتوحا، نقول إن الحقل $\vec{F}$ قابل للمفاضلة (قابل للمفاضلة k مرة، من الصنف C^k على التوالي) إذا كان التطبيق $\vec{F}$ قابلا للمفاضلة (قابلا للمفاضلة k مرة، من الصنف C^k على التوالي) أو كان اقتصارا لحقل أشعة يتمتع بهذه الخاصة على مفتوح يحوي الجزء (غير المفتوح) Σ.

نضع $M=(x,y,z)$ و $\vec{F}(M)=(P(M),Q(M),R(M))$ حيث P,Q,R دوال عددية معرفة على Σ. نكتب أحيانا $\vec{F}(\vec{r})$ أو $\vec{F}(\overrightarrow{M})$ بدل $\vec{F}(M)$ حيث $\vec{r}=\overrightarrow{M}=x\vec{i}+y\vec{i}+z\vec{i}$.

الخطوط الشعاعية، أو خطوط القوة، أو خطوط التيار لـ $\vec{F}$ هي المنحنيات التي من أجل كل نقطة M منها يكون $\vec{F}(\overrightarrow{M})$ مماسا لها في M، وهي معرفة بجملة المعادلات التفاضلية

$$dx/P=dy/Q=dz/R\ .$$

2.2. مثال

نصادف في الفيزياء حقول السرعة (سرعة جزيء من سائل متحرك مثلا)، حقول التسارع، الحقول الحرارية، الحقول الكهربائية، الحقول المغناطيسية، إلخ.

3.2. ملحوظة

الحقول السلمية وحقول الأشعة المستقلة عن الزمن (الذي يدل عليه هنا الوسيط t) تدعى مستقرة.

3. تدرج حقل سلمي

ليكن f حقلا سلميا معرفا وقابلا للمفاضلة على المفتوح Σ من $\mathscr{E}$. نعرّف في كل نقطة M من Σ، الشعاع $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M), \frac{\partial f}{\partial z}(M)\right)$ الذي نسميه تدرّج f في النقطة M ونرمز إليه بـ $\overrightarrow{\text{grad}}_M f$ أو $\nabla f\ (M)$

. وأما حقل الأشعة المعرّف على Σ بـ $M \mapsto \overrightarrow{\text{grad}}_M f$ فيسمى تدرّج f، ونرمز إليه بـ $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ أو ∇f (نابلا f)؛ وإن شئنا $\vec{\nabla} f$.

الشعاع الرمزي

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

هو مؤثر هاميلتون (Hamilton).

1.3. أمثلة

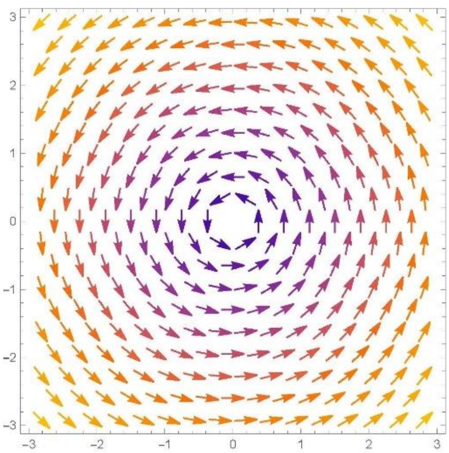
1. ليكن $f(M) = \varphi(\rho)$، $\rho = \|\overrightarrow{OM}\|$ حيث φ دالة عددية قابلة للمفاضلة على مجال من $\mathbf{R}^+$. لدينا من أجل $r \neq 0$،

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\varphi'(r)}{r}\overrightarrow{OM}.$$

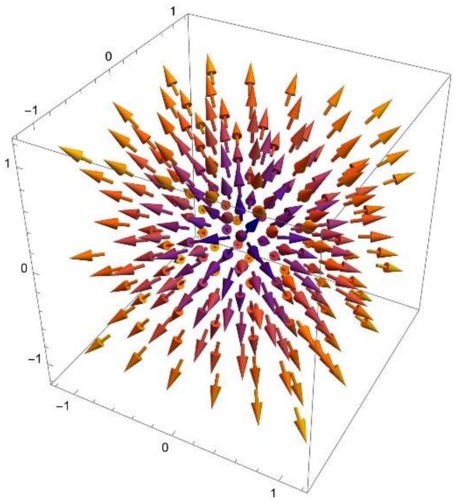
إذن فالشعاعان $\overrightarrow{\text{grad}} f$ و $\overrightarrow{OM}$ مرتبطان خطيا، وهي الخاصة التي لا تحققها إلا الدوال من هذا الشكل.

تلعب مثل حقول التدرّجات هذه دورا هاما في الميكانيك.

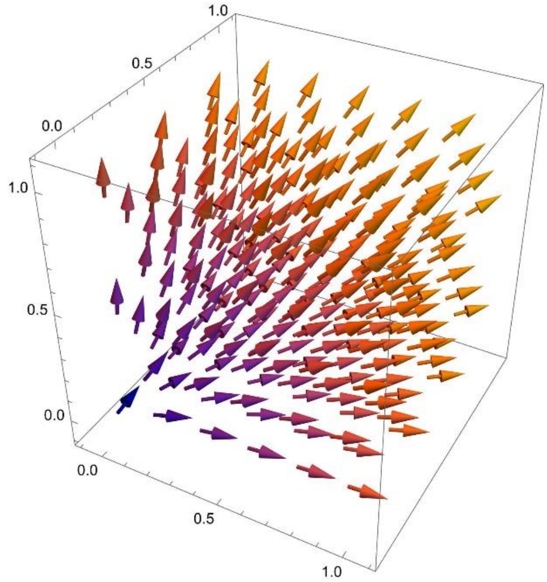
2. الشكل 1: $\vec{F} = (-y, x)$، الشكل 2: $\vec{F} = (2x, 2y, 2z)$، الشكل 3: حقل تدرّجات الحقل السلمي $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$.



الشكل 1



الشكل 2



الشكل 3

4. الكمونات السلّمية

1.4. ليكن $\vec{F}$ حقل تدرجات على Σ ؛ نقول إن الدالة العددية f القابلة للمفاضلة على Σ كمون سلمي لـ $\vec{F}$ إذا كان $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \vec{F}$. عندئذ نقول إن $\vec{F}$ مشتق من الكمون f.

إذا كان $\vec{F}$ من الصنف C^1 ، أي f من الصنف C^2 فإن

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

وإذا حقق حقل $\vec{F}$ ، من الصنف C^1 على Σ ، هذه الشروط فإن كل نقطة من Σ تقبل جوارا يكون فيه $\vec{F}$ حقل تدرجات.

2.4. ملحوظة

إن التدرّج $\vec{\nabla} f$ في نقطة M موجّه وفق الشعاع الناظم $\vec{n}$ لسطح التسوية في هذه النقطة، في اتجاه تزايد الدالة f.

وإذا كان $\vec{u}$ شعاعا واحديا إحداثياته (u_1, u_2, u_3) فإن الجداء السلمي $\vec{\nabla} f .\vec{u}$ هو مشتق f وفق منحى الشعاع $\vec{u}$ والذي يرمز إليه بـ $D_{\vec{u}} f$. كما أن صورة عنصر h من Σ بتفاضل f في نقطة هي

$$df(M)(h) = \overrightarrow{\text{grad}}_M\, f \,.\, h .$$

5. تفرق حقل أشعة

1.5. ليكن $\vec{F}$ حقل أشعة معرفا وقابلا للمفاضلة على المفتوح Σ من $\mathscr{E}$. تفرق الحقل $\vec{F}$ (الذي إحداثياته (P, Q, R)) في النقطة M هو العدد الحقيقي

$$\begin{aligned} \text{div}_M \vec{F} &= \nabla.\vec{F}(M) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M). \end{aligned}$$

وأما الدالة العددية $M \mapsto \text{div}_M \vec{F}$ فتسمى تفرّق $\vec{F}$، والذي يرمز إليه بـ $\text{div}\vec{F}$.

2.5. مثال

نعرف على $\mathscr{E} \setminus \{O\}$ حقل الأشعة $\vec{F}$ بـ

$$\vec{F}\left(\vec{M}\right) = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|^{\alpha}}$$

حيث $\alpha \in \mathbf{R}$.

لدينا

$$\vec{F}(M) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$$

و

$$\text{div}_M \vec{F} = \frac{3-\alpha}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}}}$$

من أجل $n=3$ نجد $\text{div}\vec{F}=0$ ؛ عندئذ نقول إن الحقل $\vec{F}$ نيوتني (newtonien).

3.5. تطبيقان

1.3.5. التكامل الأول للطاقة الحركية

ليكن M جزيئا كتلته تساوي الوَحدة وخاضعا لقوة $\vec{F}$ من الشكل $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} f$ حيث f دالة عددية من الصنف C^2 على مفتوح من $\mathscr{E}$. القوة $\vec{F}$ هي إذن مشتقة من دالة القوة f أو من الكمون $-f$.

تحقق حركة هذا الجزيء المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2M}{dt^2} = \overrightarrow{\text{grad}}_M f$$

التي نستنتج منها العلاقة

$$\frac{d^2M}{dt^2}.\frac{dM}{dt} = (\overrightarrow{\text{grad}}_M f).\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}f(M(t))$$

أو

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left\|\frac{dM}{dt}\right\|^2 - f(M(t))\right) = 0.$$

يُستخلَص من هذا أن الدالة

$$\mathscr{E}: t \mapsto \frac{1}{2}\left\|\frac{dM}{dt}\right\|^2 - f(M(t)) = \frac{v^2(t)}{2} - f(M(t))$$

ثابتة. يسمى العدد $\mathscr{E}(t)$ الطاقة الميكانيكية للنقطة M في اللحظة t.

إذا كانت الحركة تحقق الشروط الأولية $(t_0, M_0, \vec{V}_0)$ وإذا وضعنا

$$v_0 = \|\vec{V}_0\|$$

تأتي العلاقة

$$\frac{v^2(t)}{2}-f(M(t))=\frac{1}{2}v_0^2-f(M_0)$$

التي تُدعى التكاملَ الأولَ للطاقة الحركية.

2.3.5. مبرهنة أستروڤرادسكي (Ostrogradsky)

تكامل تفرق حقل أشعة $\vec{F}$ على حجم Σ يساوي تدفق هذا الحقل عبر السطح المغلق S الحاد لهذا الحجم؛ أي أن

$$\iiint_{\Sigma}\operatorname{div}\vec{F}dV=\iint_S\vec{F}.\vec{n}\,dS.$$

تفسير هذه العلاقة في ديناميك السوائل يكون كالآتي:

لو فرضنا أن $\vec{F}$ شعاع سرعة سائل يعبر الميدان Σ، لكان تكامل السطح $\iint_S\vec{F}.\vec{n}\,dS$ يساوي تكامل مسقط $\vec{F}$ على الشعاع الناظم $\vec{n}$ الخارج من Σ، والذي يعطي كمية السائل الخارجة من Σ عبر السطح S خلال الوَحدة الزمنية، أو الداخلة إلى Σ، إن كان هذا التكامل سالبا. وهكذا نلاحظ أن التعبير عن هذه الكمية يتم بتكامل ثلاثي لتفرق $\vec{F}$.

3.3.5. ملحوظة

يأتي من العلاقة السابقة أنه إذا كان $\operatorname{div}\vec{F}=0$، ونقول في هذه الحالة إن حقل الأشعة لولبي أو أنبوبي أو ذو تدفق حافظ، فإن تدفّق هذا الحقلِ عبر أي سطحٍ مغلقٍ منعدمٌ.

6. دوّار حقل أشعة

1.6. ليكن $\vec{F}$ حقل أشعة معرّفا وقابلا للمفاضلة على المفتوح Σ من $\mathscr{E}$. دوّار حقل الأشعة $\vec{F}$ (الذي إحداثياته (P,Q,R)) في النقطة M هو الشعاع

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}_M\vec{F}&=\overrightarrow{\operatorname{grad}}_M\vec{F}(M)\\&=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_M\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)_M\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_M\vec{k}\end{aligned}$$

الذي نكتبه تجاوزا

$$\operatorname{rot}_M\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}_M.$$

2.6. الحقل المشتق من كمون سلمي. الحقل المشتق من كمون شعاعي

1.2.6. نقول إن حقل الأشعة $\vec{F}$ كموني أو مشتق من كمون إذا كان الشعاع $\vec{F}$ تدرجا لحقل سلمي f، أي إذا وُجد حقل سلمي f بحيث

$$\vec{F}=\vec{\nabla}f\ .$$

عندئذ يكون

$$P=\frac{\partial f}{\partial x},\ Q=\frac{\partial f}{\partial y},\ R=\frac{\partial f}{\partial z}.$$

ومنه يأتي

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$$

أو

$$\mathrm{rot}\vec{F}=\vec{0}.$$

نستخلص مما سبق العلاقة

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\ f)=0.$$

في هذه الحالة، نقول إن حقل الأشعة $\vec{F}$ غير دوّار (irrotationnel) أو حافظ (conservatif) . ونلاحظ أن كل حقل كموني غير دوّار. في المقابل، كل حقل أشعة غير دوار هو حقل كموني. بعبارة أخرى: لكي يكون حقل أشعة $\vec{F}$ مشتقا من كمون سلمي يلزم ويكفي أن يكون

$$\mathrm{rot}\vec{F}=\vec{0}.$$

تسمى تارة أي نقطة M يكون فيها

$$\mathrm{rot}\vec{F}(M)=\vec{0}$$

نقطة زوبعية أو إعصارية أو ببساطة زوبعة.

2.2.6. نقول إن حقل الأشعة $\vec{F}$ مشتق من كمون شعاعي إذا كان الشعاع $\vec{F}$ دوارا لحقل أشعة أي إذا وُجد حقل أشعة $\vec{\Phi}$ بحيث

$$\vec{F}=\mathrm{rot}\vec{\Phi}.$$

3.2.6. مثال

ليكن $\vec{F}$ الحقل المعرف على $\mathscr{E}\setminus\{O\}$ بإحداثياته

$$P=\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\quad Q=\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\quad R=\frac{z}{x^2+y^2+z^2}.$$

لدينا

$$\mathrm{div}\vec{F}=0$$

والحقل $\vec{F}$ مشتق من كمون شعاعي

$$\vec{\Phi}=(A,B,C)$$

حيث

$$A=0, B=0, C(M)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2).$$

3.6. ملحوظتان

1. إذا حقق حقل الأشعة $\vec{F}$ العلاقة

$$\mathrm{div}\vec{F}=0$$

فهو لا يحوي منابعَ، وهو عندئذ لولبي أو أنبوبي أو ذو تدفق حافظ كما أسلفنا. نلاحظ هنا أن كل حقل دوار لا يحوي منابعَ، أي أن

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = 0\,.$$

نذكّر أننا نسمي منبعا كل نقطة يكون التفرق فيها موجبا تماما، وبئرا أو منبعا سالبا كل نقطة يكون التفرق فيها سالبا تماما.

2. يرفق بحقل الأشعة $\vec{F} = (P, Q, R)$ الشكل التفاضلي $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$.

تُعطَى إحداثيات $\operatorname{rot}\vec{F}$، ولتكن A, B, C بـ $d\omega = Ady \wedge dz + Bdz \wedge dx + Cdx \wedge dy$ حيث $d\omega$ هو التفاضل الخارجي للشكل ω.

4.6. تطبيق: مبرهنة ستوكس

ليكن S سطحا موجها من $\mathscr{E}$ ؛ ولتكن ∂S حافته المغلقة الموجهة؛ وليكن $\vec{F}$ حقل أشعة من الصنف C^1 على S. عندئذ فجولان الحقل $\vec{F}$ على ∂S يساوي تدفق دوار $\vec{F}$ عبر S. أي أن

$$\int_{\partial S} \vec{F}(M)dM = \int_{\partial S} \vec{F}ds = \iint_S (\operatorname{rot}\vec{F}).\vec{n}\,dS\,.$$

من أجل $\vec{F} = (P, Q, R)$، نكتب

$$\oint_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}.\vec{n}\,dS\,.$$

7. مؤثر لابلاس والدوال التو افقية

1.7. ليكن f حقلا سلميا. يمكن الإثبات بسهولة أن

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,.$$

نضع

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f\end{aligned}$$

وهو ما نسميه لابلاسي.

يدعى الرمز

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

مؤثر لابلاس. نلاحظ أن

$$\Delta = \nabla^2\,.$$

تسمى المعادلة التالية معادلة لابلاس

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

وكل دالة تحقق هذه المعادلة دالة توافقية.

تؤدي الدوال التوافقية دورا في مسائل انتقال الحرارة، تدفق الموائع والكمون الكهربائي.

2.7. مثال

إن درجة الحرارة في حقل حراري مستو مجرد من منابع الحرارة تحقق المعادلة بالمشتقات الجزئية الآتية:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

حيث t هو الزمن و a^2 معامل ثابت. إذا اقتصرنا على دراسة الأنظمة الدائمة التي تكون من أجلها الحرارة مستقلة عن الزمن نحصل على معادلة لابلاس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,.$$

وهذا يعني أن الحرارة دالة توافقية.

8. بعض من علاقات التحليل الشعاعي

نلخص في ما يأتي بعض علاقات ما يسمى التحليل الشعاعي والمستعملة غالبا في الفيزياء.

نذكر بادئ ذي بدء أنه:

- إذا كانت f دالة عددية قابلة للمفاضلة مرتين فإن

$$\mathrm{rot}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}f)=0$$
$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}f)=\Delta f\,.$$

- إذا كان $\vec{F}$ حقل أشعة قابلا للمفاضلة مرتين فإن

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{F})=0\,.$$

1.8. تدرج جداء، تفرقه، دوّاره ولابلاسيه

يمكن، بحساب بسيط، وباستعمال المعلم $\mathscr{R}$، الحصول على النتائج الآتية:

1. إذا كانت f، g دالتين عدديتين قابلتين للمفاضلة على نفس المفتوح Σ من $\mathscr{E}$ فإن

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(fg)=f\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g+g\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\,.$$

إذا كانت f، g دالتين عدديتين قابلتين للمفاضلة مرتين يكون، فضلا عن ذلك،

$$\Delta(fg)=f\,\Delta g+g\,\Delta f+2(\overrightarrow{\mathrm{grad}}f).(\overrightarrow{\mathrm{grad}}g)\,.$$

2. إذا كان $\vec{F}$ حقل أشعة قابلا للمفاضلة على مفتوح Σ من $\mathscr{E}$ وكانت φ دالة عددية قابلة للمفاضلة على Σ فإنه من أجل كل M من Σ يكون

$$\mathrm{div}_M(\varphi\vec{F})=\varphi(M)\mathrm{div}_M\vec{F}+(\overrightarrow{\mathrm{grad}}_M\varphi).\vec{F}(M)$$

أو بصورة مختصرة

$$\mathrm{div}(\varphi\vec{F})=\varphi\mathrm{div}\vec{F}+(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi).\vec{F}$$

و

$$\mathrm{rot}_M(\varphi\vec{F})=\varphi(M)\mathrm{rot}_M\vec{F}+(\overrightarrow{\mathrm{grad}}_M\varphi)\times\vec{F}(M)$$

أو

$$\operatorname{rot}(\varphi\vec{F}) = \varphi\operatorname{rot}\vec{F} + (\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\varphi)\times\vec{F}\,.$$

2.8. لاپلاسي حقل أشعة

إذا كان $\vec{F}$ حقل أشعة قابلا للمفاضلة مرتين على Σ فإن لاپلاسي $\vec{F}$ هو حقل الأشعة $\Delta\vec{F}$ المعرف بـ:

$$\Delta\vec{F} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}\vec{F}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})\,.$$

نختم بمصطلحات أجنبية لبعض المفاهيم الواردة في النص.

المصطلح بالعربية	المصطلح بالفرنسية
التكامل الأول	Intégrale première
أنبوبي	Tubulaire
تدرج	Gradient
تدفق	Flux
تفرق	Divergence
تكامل سطح	Intégrale de surface
توافقية (دالة)	Harmonique (Fonction)
جولان - عمل	Circulation - Travail
حافظ	Conservatif
حقل أشعة	Champ de vecteurs
حقل سلمي (ـ سلميات)	Champ scalaire (_ de scalaires)
خط تيار	Ligne de courant
خط شعاعي	Ligne vectorielle
خط قوة	Ligne de force
دوّار	Rotationnel
زوبعة، إعصار	Tourbillon
سطح تسوية	Surface de niveau
شبه شعاع	Pseudo vecteur
شعاع زمني	Vecteur de type temps
شعاع فضائي	Vecteur de type espace
شعاع قطبي	Vecteur polaire
شعاع محوري	Vecteur axial
شعاع موقع	Vecteur position
طاقة حركية	Energie cinétique
كمون سلمي	Potentiel scalaire
كمون شعاعي	Potentiel vecteur
لابلاسي	Laplacien
لولبي	Solénoïdal
مخروط ضوئي	Cône de lumière
مستقر	Stationnaire
منبع	Source