الأعداد التامة

جمال حيمان
طالب دكتوراه بمخبر الحسابيات والترميز والتوافقيات، كلية الرياضيات، جامعة هواري بومدين للعلوم والتكنولوجيا، الجزائر
dhimane@usthb.dz

مقدمة

قدم الرياضياتي اليوناني إقليدس في كتابه الأصول تعريفا دقيقا للعدد الطبيعي التام أو الكامل، حيث تم حصر هذا التعريف في كل عدد طبيعي يساوي مجموعَ قواسمه (باستثناء نفسه) بما فيها 1. ثم برهن أنه إذا كان العدد الطبيعي $2^p - 1$ أوليا، فإنه يُولِّد عددا طبيعيا تاما من الشكل $2^{p-1}(2^p - 1)$.

لاحقا، أثبت السويسري ليونهارت أويلر أن كل الأعداد الطبيعية التامة الزوجية لابد أن تكون من الشكل السابق. بقي السؤال عن إمكانية وجود عدد طبيعي تام فردي مطروحا، وكان موضوع دراسة من طرف كثير من الرياضياتيين بعد أويلر، والذين حددوا بعض الشروط التي ينبغي توفرها في حالة وجوده، دون أن يصلوا إلى جواب حاسم إلى غاية كتابة هذه السطور. من جهة أخرى، ظل السؤال، هل مجموعة الأعداد التامة الزوجية غير منتهية أو بتعبير آخر، هل يوجد عدد غير منته من أعداد ميرسين الأولية، مطروحا.

ولد إقليدس الإسكندري Euclid حوالي سنة 300 قبل الميلاد. هو عالم رياضيات يوناني ويلقب بأبي الهندسة. مشوار إقليدس العلمي كان في الإسكندرية في أيام حكم بطليموس الأول (323–283 قبل الميلاد). اشتهر إقليدس بكتابه الأصول وهو الكتاب الأكثر تأثيرا في تاريخ الرياضيات، وقد استخدم هذا الكتاب في تدريس الرياضيات (وخصوصا الهندسة) منذ بداية نشره قديما حتى نهاية القرن الـ19 وبداية القرن الـ20.

1. تعريف العدد التام

العدد التام أو الكامل (perfect number) حسب تعريف الرياضياتي اليوناني إقليدس [3]، هو عدد صحيح موجب يساوي مجموعَ قواسمه الفعلية الموجبة، أي الأصغر منه. بتعبير آخر، يكون العدد n تاما إذا وفقط إذا كان $\sigma(n) = 2n$ حيث $\sigma(n)$ هو مجموع قواسم n (الموجبة).

إذا كان $\sigma(n) < 2n$ نسمي n عددا ناقصا أو زهيدا (deficient) وإذا كان $\sigma(n) > 2n$ نسمي n عددا وفيرا (abundant).

أول عدد تام هو6، حيث أن $6 = 1 + 2 + 3$ ويليه العدد 28حيث أن

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

لقد أثبت إقليدس في كتابه الأصول [3] ما معناه أنه إذا كان $p = 2^k - 1$ عددا أوليا (Mersenne prime)، فإن $\frac{p(p+1)}{2}$ عدد تام.

طبقوا هذه الخاصية على العدد الأولي $2^5 - 1 = 31$ لتحصلوا على العدد التام 496 وهو الحد الثالث في متتالية الأعداد التامة.

الحدود الأولى من هذه المتتالية هي:

6، 28، 496، 8128، 33550336، 8589869056، 137438691328، ...

(السلسلة A000396 في OEIS).

كانت الأعداد التامة معروفة بالفعل في العصور القديمة. أول عدد تام، أي 6، تم ربطه من قِبَل الكُتاب الروحانيين والمتدينين، بالكمال الوجودي، ذلك أن الخلق تم في 6 أيام، وعليه فهو تام [10]. نشير في هذا الصدد إلى وُرود ذكر خلق الكون في القرآن الكريم، حيث قال الله تعالى: ﴿وَلَقَدْ خَلَقْنَا السَّمَاوات والأرْض وَمَا بَيْنَهُمَا فِي سِتَّةِ أَيَّامٍ وَمَا مَسَّنَا مِن لُّغُوبٍ﴾ الآية 38 من سورة ق.

2. الدالة مجموع القواسم σ لعدد طبيعي وخصائصها

الدالة التي تحسب مجموع القواسم الموجبة للعدد الطبيعي غير المنعدم المعطى n، هي دالة حسابية مرتبطة بجداء ديركلي(Dirichlet product) [1]، يشار إليها بالرمز σ وهي معرفة كما يأتي:

$$\sigma(n) = \sum_{d\,|n} d$$

حسب المبرهنة الأساسية في الحساب، يمكن كتابة العدد الطبيعي n، حيث $n > 1$، على شكل جداء قوى عوامل أولية كما يأتي:

$$n = p_1^{a_1}\ p_2^{a_2} \dots\ p_k^{a_k}.$$

ليس من الصعب إثبات أن:

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1}\,\frac{p_1^{a_2+1}-1}{p_2-1}\cdots\frac{p_k^{a_k+1}-1}{p_k-1}$$

مع الأخذ بعين الاعتبار أن $\sigma(1) = 1$ (أنظروا [1,11]).

كما يمكن التحقق بسهولة من أن σ دالة ضربية (multiplicative function) [4] ، أي أن

$$\sigma(p \times q) = \sigma(p) \times \sigma(q)$$

من أجل كل عددين طبيعيين p و q حيث $\gcd(p, q) = 1$ حيث gcd يرمز إلى القاسم المشترك الأكبر.

يمكن أيضا تعريف الدالة τ التي تحسب عدد القواسم الموجبة للعدد الطبيعي n ، كما يأتي :

$$\tau(n) = (a_1 + 1) \times (a_2 + 1) \times \dots \times (a_k + 1).$$

3. تمييز العدد التام الزوجي

مبرهنة 1 (إقليدس، الأصول IX-36)

إذا كان $p = 2^k - 1$ عددا أوليا فإن $N = 2^{k-1}(2^k - 1)$ عدد تام.

البرهان

من الواضح أن قاسِمَي N الأوليين هما 2 و $2^k - 1$. إذن فقواسمه الموجبة هي:

$$1; 2; 2^2; \dots; 2^{k-1}; 2^k - 1; 2(2^k - 1); 2^2(2^k - 1); \dots; 2^{k-1}(2^k - 1)$$

ونظرا إلى أن

$$2^m + 2^m(2^k - 1) = 2^{m+k}$$

فإن

$$\sigma(N) = 2^k + 2^{k+1} + \cdots + 2^{2k-1} = 2^k\left(\frac{2^k-1}{2-1}\right) = 2N.$$

طريقة أخرى

باستخدام خاصية أن σ دالة ضربية، يكون

$$\sigma(N) = \sigma(2^{k-1})\,\sigma(2^k-1) = \left(\frac{2^k-1}{2-1}\right)2^k = 2N.$$

أكمل أويلر الصورة التي بدأها إقليدس وذلك بإثباته العكس [4]، أي أن كل عدد تام زوجي هو من الشكل $\frac{p(p+1)}{2}$ ، حيث $p = 2^k - 1$ عدد أولي. أدرك ابن الهيثم هذه الحقيقة قبله بقرن من الزمن، لكنه، مع الأسف، لم يستطع تقديم برهان عليها في ذلك الوقت،[8] .

مبرهنة 2 (أويلر)

إذا كان N عددا تاما زوجيا فإنه يمكن كتابته على الشكل

$N = 2^{k-1}\,(2^k-1)$ ،

حيث $p = 2^k - 1$ عدد أولي.

البرهان

الإثبات الذي نقدمه الآن أسهل نوعا ما من إثبات أويلر. نفترض أن N عدد تام زوجي، إذن $N = 2^{k-1}\; m$ حيث m عدد فردي. ولمّا كان $\gcd(2^{k-1}, m) = 1$ فإن

$$\sigma(2^{k-1} m) = \sigma(2^{k-1})\,\sigma(m) = \frac{2^k-1}{2-1}\,\sigma(m) = (2^k-1)\,\sigma(m).$$

لكن $\sigma(2^{k-1} m) = 2^k m$،كونه عددا تاما. بالمقارنة تأتي العلاقة

$$(2^k-1)\,\sigma(m) = 2^k\, m. \qquad (*)$$

وعليه يكون

$$\sigma(m) = \frac{2^k m}{2^k-1} = \frac{(2^k-1)m+m}{2^k-1} = m + \frac{m}{2^k-1} = m+q$$

حيث $q = \frac{m}{2^k-1}$. وواضح أن q عدد صحيح لأن كلّا من $\sigma(m)$ وm عدد صحيح. إذن q يقسم m ، ولمّا كان $\sigma(m) = m+q$ ، فإنه لابد أن يكون $q = 1$. إذن مجموع قواسم m الموجبة يساوي $m+1$ ، وهذا يثبت أن m أولي. نعوض الآن عن $\sigma(m)$ في العلاقة $(*)$ ، لينتج مباشرة أن $m = 2^k - 1$ ومنه المطلوب.

بضم المبرهنتين نحصل على ما يسمى مبرهنة إقليدس- أويلر (Euclid – Euler theorem).

مبرهنة 3 (إقليدس- أويلر)

العدد الزوجي N تام إذا وفقط إذا كان من الممكن كتابته على الشكل $N = 2^{k-1}\,(2^k-1)$،

حيث $p = 2^k - 1$ عدد أولي.

ولد ليونهارت أويلر Leonhard Euler في 15 أفريل عام 1707 في بازل في سويسرا وتوفي في 18 سبتمبر عام 1783 في سانت بطرسبرغ بالإمبراطورية الروسية. هو رياضياتي وفيزيائي وفلكي وعالم منطق ومهندس سويسري. وضع اكتشافات مهمة ومؤثرة في معظم فروع الرياضيات كالحساب المتناهي الصغر ونظرية البيانات، كما أنه أسهم في عدة فروع أخرى مثل الطوبولوجيا ونظرية الأعداد التحليلية. ويعود له الفضل في إدخال كثير من المصطلحات والترميزات الرياضياتية ولا سيما في مجال التحليل الرياضياتي كمفهوم الدالة مثلا. وهو مشهور أيضا بأعماله في الميكانيكا وديناميكا الموائع والبصريات وعلم الفلك ونظرية الموسيقى. أويلر هو أعظم رياضياتيي القرن الثامن عشر وأحد أكبر الرياضياتيين في التاريخ. وهو أغزر الرياضياتيين إنتاجا على الإطلاق، لأنه ألف ما يتراوح بين الستين والثمانين مجلدا تفوق بها على أي شخص آخر في هذا المجال. قضى أويلر جزءا كبيرا من حياته في مدينة سانت بطرسبورغ الروسية وفي برلين التي كانت حينها عاصمة بروسيا.

4. خصائص عدد تام زوجي

أولى الخواص التي نريد إثباتها، وهي نتيجة مباشرة من مبرهنة أويلر الواردة أعلاه، هي أن كل عدد تام زوجي هو عدد مثلثي (triangular number) .

مبرهنة 4

كل عدد زوجي تام N عدد مثلثي.

البرهان

نذكّر أن عددا مثلثيا T هو مجموع الأعداد الطبيعية المتتابعة من 1 إلى عدد معين $q-1$، على سبيل المثال، ونظرا إلى أن

$$T = 1+2+3+\cdots+(q-1) = \frac{1}{2}q(q-1)$$

فإن للعدد المثلثي الشكلَ $\frac{1}{2}q\,(q-1)$. الآن من مبرهنة أويلر، ينتج مباشرة أن N عدد مثلثي، لأن

$$N = 2^{k-1}(2^k-1) = \frac{1}{2} \times 2^k\,(2^k-1\,).$$

ترتبط الأعداد التامة الزوجية بالقوى الثالثة للأعداد الفردية المتتابعة بعلاقة جميلة، وها هي بعض الأمثلة.

$$28 = 2^2\,(2^3-1) = 1^3+3^3$$

$$496 = 2^4\,(2^5-1) = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$$
$$8128 = 2^6(2^7-1) = 1^3+3^3+5^3+7^3+9^3+11^3+13^3+15^3$$

بشكل عام، كل عدد طبيعي N يمكن كتابته على الشكل $N = 2^{k-1}(2^k - 1)$ ، حيث k عدد طبيعي فردي، ونخص بالذكر كل عدد تام زوجي أكبر من 6، هو مجموع مكعبات الأعداد الفردية الـ $2^{(k-1)/2}$ الأولى.

مبرهنة 5

إذا كان $N = 2^{k-1}(2^k - 1)$ عددا تاما، فإن

$$N = 1^3 + 3^3 + \cdots + \left(2^{\frac{(k-1)}{2}+1} - 1\right)^3.$$

البرهان

الإثبات ليس سوى إجراء عمليات جبرية مستمدة من العلاقة الشهيرة الآتية المرتبطة بأعداد بيرنولي، والتي يمكن إثباتها بواسطة الاستدلال بالتراجع

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

نفرض أن $m = 2^{(k-1)/2}$ ، إذن

$$\begin{aligned} N &= 1^3 + 3^3 + \cdots + (2m-1)^3 \\ &= (1^3 + 2^3 + \cdots + (2m-1)^3) - (2^3 + 4^3 + \cdots + (2m-2)^3) \\ &= \frac{(2m-1)^2\ (2m)^2}{4} - 2^3\,\frac{(m-1)^2\ m^2}{4} \\ &= m^2\ (2m-1)^2 - 2\,(m-1)^2\ m^2. \end{aligned}$$

أي

$$1^3 + 3^3 + \cdots + (2m-1)^3 = m^2(2\,m^2-1) = 2^{k-1}\,(2^k-1).$$

5. أعداد ميرسين الأولية

نذكّر أن عددا لميرسين [10] (a Mersenne number) ، هو عدد صحيح موجب أصغر من قوة للعدد 2 بواحد: $M_p = 2^p - 1$.

سميت هذه الأعداد هكذا نسبة إلى مارين ميرسين (Marin Mersenne)، وهو راهب فرنسي بدأ دراستها في بداية القرن السابع عشر.

بعض التعريفات لأعداد ميرسين تشترط في الأس p أن يكون أوليا، حيث أنه إذا كان p عددا مؤلفا (غير أولي) فإن العدد $2^p - 1$ مؤلف أيضا. هذه الخاصية هي من نتائج المتطابقة الآتية

$$\begin{aligned} 2^{ab} - 1 &= (2^a - 1)\left(1 + 2^a + 2^{2a} + 2^{3a} + \cdots + 2^{(b-1)\,a}\right) \\ &= (2^b - 1)\left(1 + 2^b + 2^{2b} + 2^{3b} + \cdots + 2^{(a-1)\,b}\right). \end{aligned}$$

ولد الفرنسي مرين ميرسين Marin Mersenne في 8 سبتمبر 1588 وتوفي في 1 سبتمبر 1648. أعمال ميرسين الأولى كانت في الفلسفة والإلهيات، حيث نشر مؤلفات ضد الإلحاد والشكوكية. كان لميرسين علاقة صداقة قوية مع رونيه ديكارت وكان يدعم آراءه في الفلسفة. في المرحلة اللاحقة من حياته، ركز ميرسين أعماله حول الرياضيات، الفيزياء، نظرية الموسيقى، وعلم الصوت، وقام بالعديد من التجارب في هذه المجالات.

ترتبط أعداد ميرسين الأولية ارتباطا وثيقا بالأعداد التامة وبالأعداد الأولية. من المعلوم أنه إذا كان العدد 2^p-1 أوليا فإن p عدد أولي أيضا. أصغر عدد لميرسين مؤلفٍ، رغم كون الأس أوليا، هو $2^{11}-1=2047=23\times 89$.[5]

تم حتى الآن اكتشاف واحد وخمسين عددا أوليا لميرسين. أكبر عدد أولي معروف حاليا، نعني $2^{82,589,933}-1$ ، هو عدد أولي لميرسين (7 ديسمبر 2018).

كل أعداد ميرسين الأولية المعروفة بعد 1997، تم اكتشافها بفضل مشروع البحث الكبير عن أعداد ميرسين الأولية على الإنترنت .يبقى عدد من المسائل المتعلقة بأعداد ميرسين الأولية غير محلول. لا يُعلم، مثلا، ما إذا كان عدد أعداد ميرسين الأولية مُنتهيا أم لا. تنص حدسية لينسترا - بوميرانس – واغشتاف (Lenstra-Pomerance-Wagstaff conjecture) على أن هناك عددا غير مُنته من أعداد ميرسين الأولية، كما تتنبأ بوتيرة نُموّها. وعلى نحو أدق، فهي تنص على أن عدد أعداد ميرسين الأولية التي أسها p أصغر من العدد x يمكن تقريبه بـ

$$e^{\gamma}\cdot\log_2(x)$$

حيث $\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right)$ هو ثابت أويلر – ماسكيروني (Euler-Mascheroni).

لا يُعرف أيضا، عدد الحالات التي يكون فيها الأس أوليا ويكون عدد ميرسين ذاته غير أولي .

من بين النتائج التقليدية التي تم طرحها من قبل أويلر سنة 1750 وتم إثباتها من قبل لاقرانج (Lagrange) سنة 1775 ولاحقا من قبل لوكا (Lucas) سنة 1878 نذكّر بالآتي:

- إذا كان q عددا أوليا حيث $q\equiv 3\ (\mathrm{mod.}\ 4)$، فإن العدد $2q+1$ يقسم العدد $M_q=2^q-1$ إذا وفقط إذا كان $2q+1$ عددا أوليا، وفي هذه الحالة، إذا كان $q>3$ ، فإن العدد M_q ليس أوليا.
- أيُّ عدد أولي q بحيث يكون $2q+1$ عددا أوليا، يدعى عددا لصوفي جيرمان (Sophie Germain) أوليا . [10]

6. لائحة أعداد ميرسين الأولية العشرة الأولى

#	p	M_p	تاريخ الاكتشاف	المُكتشِف	العدد التّام المُولد
1	2	3	حوالي 430 قبل الميلاد	علماء الرياضيات اليونان	6
2	3	7	حوالي 430 قبل الميلاد	علماء الرياضيات اليونان	28
3	5	31	حوالي 430 قبل الميلاد	علماء الرياضيات اليونان	496
4	7	127	حوالي 430 قبل الميلاد	علماء الرياضيات اليونان	8128
5	13	8191	1456	غير معروف	33550336
6	17	131071	1588	بيترو كاتالدي	8589869056
7	19	524287	1588	بيترو كاتالدي	137438691328
8	31	2147483647	1772	ليونهارت أويلر	$2^{30}(2^{31}-1)$
9	61	$2^{61}-1$	نوفمبر 1883	إيفان ميخيبيتش بيرووشين	$2^{60}(2^{61}-1)$
10	89	$2^{89}-1$	يونيو 1911	ر. إ. پووِرس	$2^{88}(2^{89}-1)$

(انظر هنا لمعلومات أكثر.)

7. اختبار لوكا - ليهمر لأولية أعداد ميرسين

اختبار لوكا - ليهمر (Lucas – Lehmer test) هو فحص لأولية أعداد ميرسين. اختُرِع هذا الاختبار في الأصل من قبل الرياضياتي إدوار لوكا (Edouard Lucas) سنة 1856 وطوّره سنة 1878. تم أيضا إثباته وتطويره لاحقا من قبل الرياضياتي ديرّيك هنري ليهمر (Derrick Henry Lehmer) سنة 1930.

تعتمد آلية عمل اختبار لوكا - ليهمر على انتقاء عدد $M_q = 2^q - 1$ من بين أعداد ميرسين المراد اختباره، بشرط أن يكون دليل الأس p عددا أوليا فرديا. يمكن التحقق من أولية العدد p دون عناء باستخدام خوارزمية بسيطة مثل التقسيم التجريبي (غربال إراتوستينس) نظرا إلى أن p أصغر بشكل كبير من M_p.

نعرّف المتتالية $\{S_i\}$ ، من أجل كل $i \geq 0$ ، بـ (يمكن الاطلاع على البرهان في [10])

$$S_i = \begin{cases} 4 & : i = 0; \\ {S_{i-1}}^2 - 2 & : i \geq 1. \end{cases}$$

الحدود الأولى من هذه المتتالية هي:

4، 14، 194، 37634، 1416317954، ...

(السلسلة A003010 في OEIS).

وعليه فإن M_p عدد أولي إذا وفقط إذا كان $S_{p-2} \equiv 0 \pmod{M_p}$. يسمى العدد $S_{p-2} \bmod M_p$ باقيَ لوكا - ليهمر بترديد p. (يأخذ بعض المؤلفين $S_1 = 4$ ويختارون $S_{p-1} \bmod M_p$).

في شبه برنامج (pseudocode)، تتم كتابة الاختبار كما يأتي:

```
// Determine if Mp = 2^p − 1 is prime for p > 2
Lucas-Lehmer (p)
var s = 4
var M= 2^ p -1
repeat p-2 times: S=( ( S*S ) -2 ) mod M
if S == 0 return PRIME else return COMPOSITE
```

8. العدد التام الفردي

من غير المعروف ما إذا كان هناك أي عدد تام فردي، رغم أنه تم التوصل إلى نتائج مختلفة. في عام 1496، صرح جاك لوفيفر (Jacques Lefèvre) أن قاعدة إقليدس تعطي جميع الأعداد التامة [2]، ما يعني ضمنيا أنه لا يوجد عدد تام فردي. قال أويلر: « ما إذا كان...هناك أي أعداد تامة فردية هو السؤال الأكثر صعوبة » [7] . في هذا الصدد يقول باولو ريبنبويم: «هذا سؤال تم البحث فيه على نطاق واسع، لكن الجواب عنه ما زال مجهولا »[10]. ويقول أيضا « ومع ذلك، أعتقد أن المشكلة تقف كحِصن لا يمكن التغلب عليه، بالنسبة إلى كل ما هو معروف، سيكون من قبيل الحظ تقريبا العثور على عدد تام فردي. من ناحية أخرى، لا شيء مما تم إثباته يبدو واعدا لتبيان عدم وجود أعداد تامة فردية، الأفكار الجديدة مطلوبة. » [10]

في الآونة الأخيرة، قدم كارل پوميرانس حجة إرشادية تشير إلى أنه لا يمكن أن يوجد بالفعل عدد تام فردي.

في عام 1948، اعتبر أور أو أورَه (Øystein Ore) الوسط التوافقي (harmonic mean) لقواسم n أي

$$H(n) = \frac{\tau(n)}{\sum_{d|n} \frac{1}{d}}$$

حيث $\tau(n)$ هو عدد قواسم n.

إذا كان n عددا تاما فإن $H(n)$ عدد صحيح. في الواقع، سواء كان n زوجيا أو فرديا، يأتي هذا من نتائج أويلر. يُشار إلى هذا الادعاء بمخمنة أور [10] .

كل عدد صحيح (موجب) n بحيث يكون الوسط التوافقي لقواسمه عددا صحيحا يدعى عددا ذا وسط توافقي صحيح.

تم تعريف هذه الأعداد من قبل أور (سنة 1948) وتظهر في الأدبيات الرياضياتية الإنقليزية تحت أسماء مختلفة، على وجه الخصوص، أعداد أور (التوافقية)، الأعداد توافقية القواسم، والأعداد ذات الوسط التوافقي الصحيح، وهو ما تم اختياره في هذا النص.

أثبت أور أن كل الأعداد التامة هي أعداد ذات وسط توافقي صحيح، أثبت كذلك أن أي قوة لعدد أولي لا ينبغي أن تكون عددا ذا وسط توافقي صحيح، نفس الأمر في ما يخص الأعداد الصحيحة الخالية من المربعات (squarefree integer) والأكبر من 6.

المثال الأول (عدد تام)

من أجل $n = 6$ ، لدينا

$\tau(6) = 4$ و $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$.

ومنه يأتي

$$H(6) = \frac{6\,\tau(6)}{\sigma(6)} = 2$$

المثال الثاني (عدد غير تام)

من أجل $n = 140$ ، لدينا $\tau(140) = 12$

و $\sigma(140) = 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 10 + 14 + 20 + 28 + 35 + 70 + 140 = 336$ ،

ومنه يأتي $H(140) = \frac{140\,\tau(140)}{\sigma(140)} = 5$

الحدود الأولى لمتتالية الأعداد ذات الوسط التوافقي الصحيح هي:

1، 6، 28، 140، 270، 496، 672، 1638، 2970، 6200، 8128، 8190...

(السلسلة A001599 في OEIS).

في ما يأتي سرد لبعض المساهمات لمختلف الرياضياتيين [5]، لكي يكون العدد الفردي N تاما أو عددا ذا وسط توافقي صحيح فرديا غير تافه يجب أن يحقق ما يأتي:

1. أن يكون $N = p^{\alpha}\, {q_1}^{2e_1} \ldots {q_k}^{2e_k}$ حيث p ، q_1 ، ... ، q_k أعداد أولية مختلفة بحيث يكون $p \equiv \alpha \equiv 1 \pmod 4$.
2. أن يكون $N > 10^{1500}$ ، ومازال البحث جاريا لإيجاد حد أكبر بالنسبة إلى الأعداد التامة الفردية و يزيد عن 10^{12} بالنسبة إلى الأعداد ذات الوسط التوافقي الصحيح الفردية غير التافهه.
3. إذا كان p أكبر قاسم أولي للعدد N فإن $p > 10^8$.
4. أن يكون للعدد N عشرة عوامل أولية مختلفة على الأقل.
5. يوجد بالضبط 633 عددا توافقيا أصغر من 10^{13}.

المراجع

[**1**] Apostol T. M.: Introduction to Analytic Number Theory, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.
[**2**] Dickson L. E. : History of the Theory of Numbers, Vol. I., Carnegie Institution of Washington, Washington, 1919.
[**3**] Euclid: The Thirteen Books of The Elements, Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath, Vol. 2 (Books III–IX), Dover, New York, 1959.
[**4**] Gerstein L. J.: Introduction to Mathematical Structures and Proofs, Springer, New York, 2012.
[**5**] Goto T.: On Ore's harmonic numbers, Tokyo University of Science, 2004. https://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/tg/files/uts.pdf
[**6**] Guy R. K.: Unsolved Problems in Number Theory, Springer, New York, 2004.
[**7**] Knill O.: The oldest open problem in mathematics, NEU Math Circle, December 2, 2007. https://people.math.harvard.edu/~knill/seminars/perfect/handout.pdf
[**8**] O'Connor J. J. & Robertson E. F.: Abu Ali al-Hasan Ibn al-Haytham, MacTutor History of Mathematics archive, University of St Andrews. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Haytham/
[**9**] Ore O.: On the Averages of the Divisors of a Number, Amer. Math. Monthly, 55, 1948.
[**10**] Ribenboim P.: The New Book of Prime Number Records, Springer Verlag, New York, 1996.
[**11**] Travaglini G.: Number Theory, Fourier Analysis and Geometric Discrepancy, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.