

من مبرهنة الاستحالة لفان نيومان إلى التشابك الكمومي (2)

مبرهنة الاستحالة: هل كانت هفوة عالم؟

جمال ضو

أستاذ بقسم الفيزياء، كلية العلوم الدقيقة، جامعة الشهيد حمه لخضر، الوادي

1. مبرهنة الاستحالة لفان نيومان

تطرقنا في الجزء الأول من هذه المقالة إلى مفارقة أو تجربة "آ ب ر" وفكرة المتغيرات الخفية كمقترح لحل الإشكاليات التفسيرية والوجودية لميكانيكا الكم وخاصة تلك التي ترتبت عن هذه المفارقة، المرجع (1)، وفي هذا الجزء سنتطرق إلى مبرهنة الاستحالة الشهيرة لفان نيومان والجدل الذي أثارته ولا تزال تثيره خاصة لدى المهتمين بفلسفة وتاريخ العلوم. فبرغم من مضي قرن تقريبا عن هذه المبرهنة إلا أنها لا تزال تُسئل كثيرا من الحبر.

بدايةً، وحتى نضع القضايا في سياقها التاريخي الصحيح نشير إلى أن فكرة المتغيرات الخفية، أو ما عُرف بدالة الحالة "غير مشتتة" Dispersion-free، ظهرت ثلاث سنوات قبيل نشر الثلاثي آينشتاين-بودلسي-روزن لمقالتهم التي نصت على المفارقة، بينما الارتباط بين مفارقة "آ ب ر" وفكرة المتغيرات الخفية يعود إلى سياقات تاريخية أخرى سنأتي على ذكرها في هذا الجزء من المقالة.

دعنا أولاً نذكر باختصار بفكرة المتغيرات: تقوم الفكرة على افتراض وجود متغير أو متغيرات خفية، نرمز لها اختصاراً بـ $\{\lambda\}$ ، بالإضافة إلى دالة الحالة الكمية الاعتيادية ψ ، بحيث نحصل على حالة جديدة غير-مشتتة (ψ, λ) تسمح بتحديد نتائج قياس جميع الملاحظات الفيزيائية بدقة من دون أي ترتيب.

الآن، مثلما هو معلوم، في نهاية العشرينات كان ميكانيكا الكم قد أخذت تقريباً شكله النهائي وأصبح من الممكن تفسير أغلب الظواهر الفيزيائية الذرية باستعمال التفسير الاحتمالي لدالة الحالة (دالة الموجة) عبر صياغة شرودينغر أو عبر الصياغة المصفوفية المكافئة لهايزنبرغ. ويمكن القول إن التفسير الذي قاده العالم نيلز بور، أو ما أصبح يعرف بتفسير كوبنهاجن، كان هو السائد والغالب بالرغم من اعتراضات آينشتاين أو مواقف شرودينغر وديبروي De Broglie.

في سنة 1932 أَلَّفَ فان نيومان كتاباً باللغة الألمانية بعنوان "الأسس الرياضية لميكانيكا الكم"، المرجع (10). وكما يوحي العنوان فإن الهدف الرئيس للكتاب كان وضع الأسس الرياضية لميكانيكا الكم عبر صياغته واختزاله في أقل عدد من البديهيات والمسلمات الرياضية. ويُجمع أغلب، إن لم يكن كل، المهتمين بتاريخ العلوم أن فان نيومان كان مدفوعاً عند تأليف هذا الكتاب بتأثره بمدرسة هيلبرت التي ينتهي إليها. ومن ضمن الأهداف الرئيسة لهذه المدرسة العلمية تأصيل فروع الرياضيات وإعادة صياغتها عبر اختزالها في عدد من البديهيات، أو ما يعرف بالمقاربة المسلمانية. دفعت هذه النزعة بفان نيومان إلى محاولة البحث عن البنية الرياضية الطبيعية لميكانيكا الكم، ثم صياغة أسسه في عدد من البديهيات والمسلمات الأساسية والتي يمكن من خلالها استخلاص كل النتائج والتصورات الكمومية التي تبلورت في نهاية العشرينيات من القرن الماضي.

وهناك إجماع على أن فان نيومان (الرياضياتي في الأساس) وُفِّقَ إلى حد بعيد في مسعاه، ولا أدل على ذلك من أن ميكانيكا الكم التي تُدرس إلى اليوم تقوم بالأساس على التصورات والبنية الرياضية التي وضعها في كتابه هذا، بالإضافة طبعا إلى كتاب ديراك الذي صدر في نسخته الأولى قبل ذلك بسنتين. فما يُدرس اليوم هو تقريبا الخلطة

السحرية بين هذين المرجعين التاريخيين. للاطلاع أكثر على أهم محتويات كتاب فان نيومان والسياقات التاريخية التي أحاطت بتأليفه نحيل القارئ إلى المرجع (7).

لم يكتف فان نيومان بصياغة ميكانيكا الكم بصياغة رياضية متماسكة بل عرج في الفصل الرابع من الكتاب على مناقشة إمكانية وجود تفسير غير احتمالي أو يقيني لميكانيكا الكم عبر متغيرات خفية أو حالات غير مشتتة، بحيث يكون ميكانيكا الكم بصياغته تلك مجرد تعبير عن عجزنا عن معرفة متغيرات أخرى أو السيطرة عليها. وكانت خلاصة إجابته عن هذا السؤال أنه "لا يمكن في ظل بعض المسلمات النوعية الأساسية لميكانيكا الكم أن تكون هناك حالات غير مشتتة بمتغيرات خفية محلية وتكون في نفس الوقت متوافقة مع نتائج ميكانيكا الكم".

السؤال الطبيعي الذي يطرح هنا هو كيف استطاع فان نيومان أن يخلص إلى استحالة إمكانية وجود متغيرات خفية أو حالات غير مشتتة؟ أو بعبارة أخرى، ما هي المسلمات التي أنطلق منها ليخلص إلى هذه النتيجة؟ قبل الإجابة على هذا التساؤل، نشير أنه تفاديا للغرق في تفاصيل رياضية وتاريخية قد لا تهم كثير من القراء وقد لا يستوعبها أغلب الطلبة (مصطلحات رياضية قديمة أو تتطلب معرفة رياضية أكثر مما يعلمه طالب ماستر فيزياء اليوم)، ونظرا لمحدودية مساحة المقال فإننا سنحاول أن نركز على أهم النقاط ذات الأهمية والحاسمة، ونعبر بالقارئ إلى ما يمكن أن نسميه خلاصة هذه الحادثة التاريخية التي أسالت ولا تزال تسيل كثيرا من الحبر، بل أدت إلى التراشق أحيانا مثلما سيتضح لاحقا.

بالرغم من أن الكل يجمع على أن فان نيومان خلص إلى مبرهنة الاستحالة انطلاقا من مسلمات محددة، وبما أن هذا الأخير لم يقدّم قائمة واضحة لها فإن هناك نوعا من الاختلاف حول أي من هذه الفرضيات يمكن اعتبارها المسلمات الأساسية، مرجع (9). لن نخوض في هذه الاختلافات والقوائم بل سنكتفي بالإشارة إلى المسلمة الرئيسية والمتفق حول كونها المفتاحية في مبرهنة الاستحالة، وهي التي كانت محل انتقاد واسع، واعتبرت من لدن عدد من العلماء زلة كبيرة و"خطيئة" ما كانت لتصدر من قامة كبيرة وفذة مثل فان نيومان.

تنص هذه المسلمة على ما يلي:

إذا كان A و B ملاحظين فيزيائيين فإن القيمة المتوسطة لمجموعهما تساوي مجموع القيمتين المتوسطتين لكل منهما، أي: $\langle A + B \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle$.

للوهلة الأولى، تبدو هذه المسلمة بديهية وبرينة، ومن السهل على القارئ أو طالب الفيزياء أن يتأكد من أنها محققة دائما في ميكانيكا الكم بسبب البنية الخطية لميكانيكا الكم (فضاء هيلبرت والملاحظات كمؤثرات خطية). بعد صدور كتاب فان نيومان وما احتواه من تأصيل رياضي ومبرهنة الاستحالة، حظي أسلوبه ومقاربتة بإشادة كبيرة، ليس فقط من أتباعه ومن اتفقوا مع تفسير مدرسة كوبنهاغن بل حتى من المعارضين والذين اعتبروا أنه نجح في المقام الأول في نقل الإشكاليات التفسيرية والمنهجية لميكانيكا الكم من عالم التخمينات إلى حقل التحليل الرياضي الدقيق والقرار التجريبي.

من ناحية أخرى، يرى كثير من مؤرخي العلوم أن هدية فان نيومان لمدرسة كوبنهاغن لا تقدر بثمن، إذ أنه وفر لها الحصن الذي تترست خلفه لسنوات عديدة ضد إمكانية استعادة اليقينية في الفيزياء، وهو ما كان يحتاجه المجتمع الفيزيائي، إذ اعتبرت الأغلبية أن المسألة محسومة رياضياتيا والنقاش حولها أغلق بمبرهنة الاستحالة لفان نيومان.

2. نقض وانتقاد بيل لمبرهنة الاستحالة

مثلما أشرنا أعلاه فإن مبرهنة فان نيومان اعتبرت من قبل القطاع العام للمجتمع الفيزيائي بمثابة مبرهنة رياضية قائمة على أسس صلبة وقارة، والشائع في المجتمع الفيزيائي - ربما إلى اليوم - أنه لا أحد من الفيزيائيين تحدى مبرهنة الاستحالة أو حاول نقضها أو انتقد منهج فان نيومان ومسلماته التي انطلق منها قبل الفيزيائي بيل. لكن الحقيقة التاريخية تقول إن شكوكا حقيقية أحاطت بمدى حججية مبرهنة فان نيومان وانتقادات جوهرية وجهت إليها سنوات قليلة فقط بعيد صدور الكتاب.

فبعد سنة من صدور المبرهنة والكتاب كتبت الفيلسوفة والرياضياتية الألمانية هرمان Hermann مقالا عنوانه "اليقين وميكانيكا الكم"، المرجع (8)، وفي معرض انتقادها لمبرهنة الاستحالة لفان نيومان وضعت عمليا إصبعها على المسلمة التي ذكرناها أعلاه والخلل الكامن في ثنائياها، وخلصت بعرض وتحليل منطقيين: مبرهنة الاستحالة عمليا خالية من الحججية التي أرادها لها فان نيومان.

سنفصل لاحقا في هذه النقطة، لأنها تقريبا هي نفسها الحجة التي نقض بها بيل مبرهنة فان نيومان، ولكن نشير إلى أن مقال وانتقاد العالم هرمان لم يلقيا أي صدى يذكر في ظل سطوة مدرسة كوبنهاغن والنجاحات الماهرة لميكانيكا الكم، وتم إهمال انتقادها تقريبا لعقود، ولم ينفذ الغبار عن مساهمتها إلا سنة 1977 من طرف Jammer ، المرجع (9)، أي سنوات بعد مقال بيل. وهذا بالرغم من أن هذه العالمة راسلت آنذاك كبار العلماء الألمان (على رأسهم هايزنبرغ) ولم تلق إلا ردا واحدا من فيزيائي ألماني لا يعتبر من الصف الأول والذي اتفق ضمنا مع طرحها وثنى عملها ليُنسى بعدها لأزيد من أربع عقود.

بالإضافة إلى مقال هرمان الذي نشر مباشرة بعد صدور كتاب فان نيومان، ظهرت تباعا انتقادات على أسس منطقية قدمها Reichenbach سنة 1944 وقبله تمبل Temple سنة 1935.

كما تجدر الإشارة إلى أنه في بداية الخمسينات، وبعد أعمال بوم Bohm يمكن القول إن مبرهنة الاستحالة بدأت تفقد كثيرا من بريقها وقوتها، ولكن الشاهد أن لا أحد استطاع تحديها وكشف مكن الخلل في حججيتها بشكل واضح وحاسم قبل بيل.

نشير أولا إلى أن الفيزيائي النظري بيل لم يكن في بداية مشواره من العاملين أو الباحثين في مجال تفسير ميكانيكا الكم، ولا من أولئك الذين واصلوا محاولات البحث في التأسيس الرياضي لمنهج فان نيومان ونتائجها، فلقد كان فيزيائيا نظريا بارزا مشغولا بمجال النظرية الكمية للحقول وتصميم المسرعات النووية، وله إسهاماته الكبيرة. إن اهتمام بيل بتفسير ميكانيكا الكم واشكالياته كان أقرب إلى الهواية بالنسبة إليه. إلا أن مساهمته في هذا المجال، كما سيتبين، كانت وللمفارقة أكثر تأثيرا وأشد وقعا من مساهمات من كان تفسير وتأسيس ميكانيكا الكم ميدان بحثهم الرئيس. ومثلت المساهمة نقلة نوعية في هذا المجال وفتحت بابا من النقاش الفيزيائي والتاريخي الذي لم يغلق إلى يوم الناس هذا.

والمميز، في رأينا، في مساهمة بيل والذي جعلها تختلف عن أي انتقادات سابقة أنها كانت عملية وموجهة بدقة، وخالية من أي سفسطة أو رؤية فلسفية. ففي مقالين متتاليين أحدث نقلة نوعية في هذا الموضوع. وللمفارقة أيضا فإن المقالين نشر في مجلتين متواضعتين!

دعنا نلخص محل اعتراض بيل على حججية مبرهنة فان نيومان.

اللافت مثلما أشرنا، أن بيل لم يبدأ في الاعتراض عن مبرهنة الاستحالة مستعملا حججا فلسفية أو منطقية معقدة، بل قدّم مثلا مناقضا لأطروحة فان نيومان، وهو مثال يثبت أنه يمكن إدخال متغيرات خفية والحصول على حالة غير مشتتة من دون أن يناقض ذلك أي من نتائج ميكانيكا الكم (طبعا، في حدود ذلك المثال وهو كافٍ). ثم انتقل

بعدها إلى تبيان وجه الخلل في مبرهنة فان نيومان واضعا أصبعه على المسلمة التي ذكرناها أعلاه، وموضحا أنه لا يوجد أي مسوغ فيزيائي أو منطقي لها، وأنها مجرد مسلمة اعتباطية.

لن نعرض المثل المناقض لبيل ونحيل القارئ لمقال بيل المنشور في الكتاب أو المرجع (3)، بل سنمر مباشرة إلى السؤال المنطقي الذي يطرح نفسه، وهو: أين يكمن الخلل في هذه المبرهنة حتى يجد بيل مثالا مناقضا لها بسهولة؟ (سهولة نسبية طبعا!)

طبعا، الخلل ليس ناتجا عن خطأ في البرهان، ولكن الخلل في الحقيقة، ومثلما أشرنا هو في أحد المسلمات التي انطلق منها فان نيومان ليقصي إمكانية وجود تفسير يقيني لميكانيكا الكم قائم على متغيرات خفية محلية. فلقد انطلق فان نيومان من مسلمة أن القيم المتوسطة لمجموع مؤثرين أو ملاحظين فيزيائيين هي مجموع القيم المتوسطة لكل ملاحظ على حدة. هذا الأمر صحيح طبعا في ميكانيكا الكم وتحققه الحالات الكمية المنتمية إلى فضاء هيلبرت والملاحظات الفيزيائية. ولكن أن يتم اشتراط تحقيقه على الحالات غير المشتتة، فهذا ما اعتبره أغلب العلماء والنقاد أمرا من الصعب تقبله، ولا مبرر له ذلك أن الأمر يمكن انتقاده ونقضه على مستويين. بالعودة إلى المسلمة التي ذكرناها سابقا يمكن الاعتراض على نصها كما يلي:

لنفترض أن المؤثرين A و B غير متبادلين، وفي هذه الحالة -وكما هو معلوم (وكان معلوما من لدن فان نيومان، بطبيعة الحال)- فإن القيم الذاتية للمؤثر الذي هو محصلة مجموعهما ليست مجموع القيم الذاتية لكل من A و B ، أي أن التركيبة الخطية للمؤثرات لا تستلزم بالضرورة التركيبة الخطية للقيم الذاتية. الآن، بالعودة إلى القيمة المتوسطة فإنه مثلما أشرنا سابقا، تكون القيمة المتوسطة على الحالات الكمية (أشعة فضاء هيلبرت) هي مجموع القيم المتوسطة لكل من A و B . ولكن هذا ليس بالضرورة صحيحا في حالات يفترض فيها أنها غير مشتتة تكون فيها نتائج القياس معلومة يقينا. ففي الحالات غير المشتتة (التي تحوي متغيرات خفية تحدد نتيجة القياس أو القيمة الذاتية بدقة) تكون القيمة المتوسطة هي نفسها دائما القيمة الذاتية لكل ملاحظ. وعليه فإن المساواة التالية

$$\langle A + B \rangle_{HV} = \langle A \rangle_{HV} + \langle B \rangle_{HV}$$

تقتضي بالضرورة أن تكون القيم الذاتية أو نتائج القياس لـ $A + B$ هي مجموع القيم الذاتية لـ A و B . وهذا غير ممكن مثلما هو معلوم. يشير هنا HV إلى الحالات المحددة بمتغيرات خفية أو غير مشتتة. وكمثال أكثر صراحة، نأخذ مؤثر السبين في اتجاه يصنع زاوية 45 درجة بين المحورين Ox و Oz والذي هو عبارة عن محصلة تركيبية خطية لمركبتي السبين في الاتجاهين Ox و Oz كما يلي:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{2}} (S_x + S_z).$$

ولنفترض مثلا أن حالة النظام معطاة بـ

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

من السهل أن يتأكد القارئ باستعمال مصفوفات باولي أن

$$\langle S_n \rangle_\psi = \frac{7}{10\sqrt{2}}.$$

ولدينا من ناحية أخرى

$$\langle S_x \rangle_\psi = \frac{4}{10\sqrt{2}} \text{ و } \langle S_z \rangle_\psi = \frac{3}{10\sqrt{2}}.$$

وعليه فإنه، مثلما كان متوقعا، فإن القيمة المتوسطة لـ S_n هي محصلة مجموع القيمتين المتوسطتين لكل من $\frac{1}{\sqrt{2}}S_x$ و $\frac{1}{\sqrt{2}}S_z$.

والآن، ماذا لو اعتبرنا القيمة المتوسطة على حالة غير مشتتة. بما أن الحالة غير المشتتة تعطي فقط إحدى القيم الذاتية فإن

$$\langle S_n \rangle_{HV} = \mp \frac{1}{2}$$

ثانيا

$$; \frac{1}{\sqrt{2}} \langle S_z \rangle_{HV} = \mp \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \langle S_x \rangle_{HV} = \mp \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

مما يعني ضرورة تحقق المساواة

$$\mp \frac{1}{2} = \mp \frac{1}{2\sqrt{2}} \mp \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

وهذا مستحيل أن يتحقق: فالطرف الأيمن للمساواة السابقة يحتمل فقط إحدى القيم التالية $\mp \frac{1}{\sqrt{2}}$ أو 0. كما أنه لقياس S_x نحتاج لتجربة محددة. ولقياس S_z نحتاج لتجربة بتوجيه آخر، ولقياس $\frac{1}{\sqrt{2}}(S_x + S_z)$ نحتاج لتجربة أخرى بتوجيه ثالث مختلف.

في الحقيقة، قد يبدو مستغربا كيف غابت هذه النقطة عن ذهن فان نيومان، فهو عمليا افترض بداية مسلمة غير منطقية ومناقضة لفكرة الحالات غير المشتتة. فإذا كان من المنطقي افتراض تلك المسلمة على الحالات الكمية العادية (وهي محققة) فلا يوجد مبرر منطقي لتعميمها على الحالات غير المشتتة والتي من المفترض أن تعطي نتائج القياس بدقة. كما أنه يتضح للقارئ لماذا أدت مسلمة فان نيومان هذه إلى نتيجة مفادها استحالة وجود تفسير يقيني وسببي لميكانيكا الكم يعتمد على متغيرات خفية. فعلمية إقصاء إمكانية وجود تفسير يعتمد على متغيرات خفية لميكانيكا الكم، ويعطي نفس نتائجه التجريبية ليس إلا نتاج هذه المسلمة الاعتباطية وغير المبررة.

لن نخوض كثيرا في التأويلات والسجلات التاريخية والفلسفية التي دارت حول مدى إدراك فان نيومان لهذا الخلل أو الدافع الحقيقي وراء هذه المسلمة ومسوغاته. ولكن نرى أنه من الضروري الإشارة باقتضاب إلى أهم اتجاهين.

ففي مقالته الشهيرة الأولى، يقول بيل: "...إن ما أدى إلى إقصاء فكرة المتغيرات الخفية لم تكن التوقعات الموضوعية لعملية القياس لميكانيكا الكم، ولكنها فرضية فان نيومان الاعتباطية...."، المرجع (3).

بل ذهب بيل إلى أكثر من ذلك في حديث له سنة 1988 لمجلة Omni حيث قال "... إن مبرهنة فان نيومان، ما إن تمسك بها حتى تفتت بين يديك! لا يوجد شيء فيها. ليست فقط معيبة، بل ساذجة! ... يمكنك أن تنقل عني: مبرهنة فان نيومان ليست فقط خاطئة بل تافهة."، المرجع (2).

بينما قال العالم الفيزيائي الرياضي الشهير Haag في تقديمه لأحد الإصدارات المترجمة لكتاب فان نيومان سنة 1996 "لقد تم اعتبار مبرهنته غبية"، ويضيف بشيء من الاستدراك والاعتذار: "يجب ألا ننسى أن هذا حدث في سياق مساهمة أصلية لفان نيومان..."، المرجع (7) (سياق لم تكن بعض المفاهيم الرياضية الدقيقة واضحة المعالم أو مفهومة).

من ناحية أخرى، يوجد فريق آخر من المهتمين بفلسفة وتاريخ العلوم، وبالأخص ميكانيكا الكم اختار تفسير ما جاء في كتاب فان نيومان ومبرهنته بطريقة مختلفة، حيث اعتبر هذا الفريق أن بيل وهيرمان لم يفهما جيدا وبشكل

صحيح القصد من المبرهنة والمسلمة التي اعتمد عليها فان نيومان. بل ذهب بعض هؤلاء إلى اتهام بيل بشكل ضمني أن دافعه لانتقاد مبرهنة فان نيومان كان موقفه المسبق من تفسير كوبنهاغن، المرجع (6) و (5).
 لن نقف مطولا عند مواقف هذا الفريق أو ذاك ولن نتعرض إلى الكيفية التي أصبح بها كتاب ومبرهنة فان نيومان محل تأويلات مختلفة. ذلك أنه مهما كان الموقف من مبرهنة فان نيومان وتأويل مقصده فلن يغير هذا شيئا في حقيقة تغير المشهد بشكل كلي بعد مقالة بيل. فلقد نجح هذا الأخير عبر مثال بسيط في إثبات إمكانية وجود حالات غير مشتتة بمتغيرات خفية، وهذا بصرف النظر عن كل التأويلات التي يمكن أن تُعطى لمسلمة ومبرهنة فان نيومان. لقد فعل بيل أكثر من ذلك حين أثبت ضرورة تحقق متباينة مرتبطة بأي تفسير يقوم على حالات غير المشتتة أو أي متغيرات خفية مفسرة لتجربة "آ ب ر". هذه المتباينة التي أعادت مفارقة "آ ب ر" إلى الواجهة مرة أخرى أصبحت تعرف بمتباينة بيل أو نظرية بيل.
 ستكون هذه المتباينة ونتائجها وجدورها أهم محاور الجزء الثالث والأخير من هذا المقال.

المراجع

1. ضو ج.: من مبرهنة الاستحالة إلى التشابك الكمومي (1)، مجلة بشار العلوم، العدد 2، أبريل 2022.

2. Bell J. S.: Interview in Omni, May 1988.
3. Bell J. S.: Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
4. Bell J.S.: On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. Physics. 1 (3), 1964.
5. Bub J.: von Neumann's 'No Hidden Variables' Proof: A Re-Appraisal. Foundations of Physics **volume** 40, 2010.
arXiv:1006.0499 [quant-ph].
6. Caruana L.: John von Neumann's 'Impossibility Proof' in a Historical Perspective, Physics 32, 1995.
7. Dieks D.: von Neumann's Impossibility Proof: Mathematics in the Service of Rhetorics. Studies in History and Philosophy of Modern Physics 60, 2017.
arXiv:1801.09305.
8. Hermann G.: Determinismus und Quantenmechanik. Typescript, 25 pages. Dirac Archive, document DRAC 3/11, University Libraries, Florida State University, Tallahassee, 1933.
9. Jammer M.: The Philosophy of Quantum Mechanics. John Wiley and Sons, 1974.
10. von Neumann. J : Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin, Springer, 1932; Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, translated by R.T.Beyer, Princeton Univ. Press, 1955.