حينما تتحوّل الرياضيات إلى متعة

صادق بوروبي
أستاذ بكلية الرياضيات، جامعة هواري بومدين للعلوم والتكنولوجيا، الجزائر
bouroubis@gmail.com

مقدّمة بين يدي الموضوع

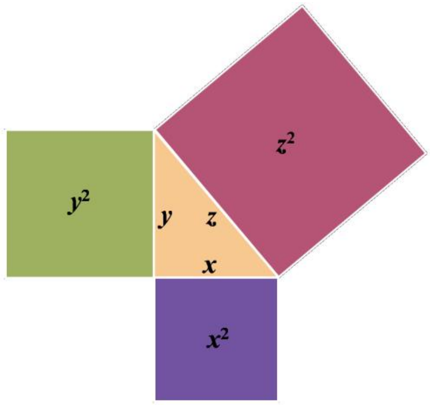
إنه من دواعي حيرتي ودهشتي، أن أسمع شخصًا يقول إنه يكره الرياضيات، في حين أنني كنت وما زلت منذ نعومة أظافري مفتونا بهذا العلم الذي لطالما اعتبرته فنا يحفّزه الجمال، لدرجة أنني أشعر دائما بالحماسة والسعادة كلما أتيحت لي فرصة لعرض درة من درر هذا العلم إلى الآخرين. ولكن وبكل أسف، الشغف بأي علم من العلوم ليس أمرا معديا. لذلك أتصوّر أن جعل الدرس في مادة الرياضيات ممتعًا لدى المتلقي، يتطلب جملة من الخصائص يستحب توفرها في المعلم، كالتفكير العميق، والحسّ المرهف، والخيال الواسع، والشخصية القوية، والحماسة المستمرة، بالإضافة إلى التحكم التام والتمكن في المادة.

ولتطوير الشغف والفضول لدى التلميذ في مادة الرياضيات على وجه الخصوص، من الضروري، حسب رأيي، وضع هذا التلميذ في ظروف يبدو فيها هذا العلم حيويًا وممتعًا. لهذا، غالبًا ما يرتبط اختيار المشكلة المطروحة أمام التلميذ، بالرياضيات الترفيهية، أولا بسبب محتوى المشكلة ذاتها، وثانيا بسبب هذا الجانب الترفيهي الذي يمكن أن يكون مصاحبا لهذه المشكلة طيلة عملية الحل.

سنركز في هذا المقام على مثال نموذجي لمشكلة رياضية تعليمية مرحة، نتناول من خلالها موضوعا ممتعا ذا طبيعة هندسية يعود تاريخه إلى القرن السابع عشر، يتسنى لنا، انطلاقا منه، أن نطرح العديد من المشكلات المماثلة حول نفس الموضوع، يمكن معالجتها في جميع المراحل المدرسية: المتوسطة والثانوية والجامعية وحتى الابتدائية. ينبغي فقط مراعاة أثناء طرح هذه المشكلات، مهارة ومعرفة المتلقي، وبذلك يمكن تحويل المشكلة إلى مشكلات أبسط منها أو معقدة، تصحبها خطوات ومراحل تعليمية جديدة أثناء بناء الحلول المقترحة.

1. نظرية بيار دي فيرما

وُلد بيار دي فيرما Pierre de Fermat في السابع من أغسطس عام 1601 في مدينه بومنت دي لومان Beaumont-de-Lomagne في فرنسا. كان فيرما متبحرا في شتى مجالات العلوم. تحصل في 1631 على شهادة البكالوريا في القانون من جامعة أورليانز Orléans، وعمل في البرلمان المحلي في تولوز Toulouse، ليصبح بعد ذلك مستشارا في عام 1634. ومع ذلك كانت الرياضيات هوايته المفضلة، إذ كان يعكف على حل المسائل الرياضية بعد عودته من العمل إلى البيت. ذات ليلة من ليالي سنة 1637، خطرت على بال فيرما تساؤلات حول معادلة فيثاغورس للمثلث القائم وأخرى شبيهة بها، حيث تساءل عن الحلول الكلية الطبيعية لتلك المعادلة: هل عددها لا نهائي؟ وماذا يحدث لو غيرنا في معادلة فيثاغورس 2 بـ 3 أو 4 أو 5 أو بأي عدد طبيعي $n \geq 3$، هل تبقى للمعادلة حلول؟



معادلة فيثاغورس

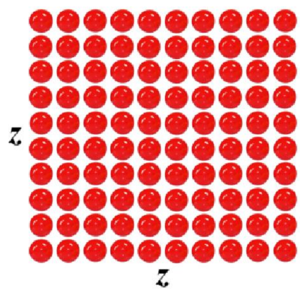
$x^2 + y^2 = z^2$

سنقترح فيما يلي استراتيجيتين تعليميتين للجواب عن السؤال الأول لفيرما المتعلق بلا نهائية الحلول الطبيعية لمعادلة فيثاغورس، تناسب تماما جميع المستويات من المتوسطة إلى الجامعة، ثم نطرح مشكلتين جديدتين تتعلق أولاهما بسؤال فيرما الثاني وثانيتهما بسؤال فيرما الأول، وكل ذلك تحت غطاء منهج المقارنة.

2. حول سؤال فيرما الأول

الإستراتيجية الأولى

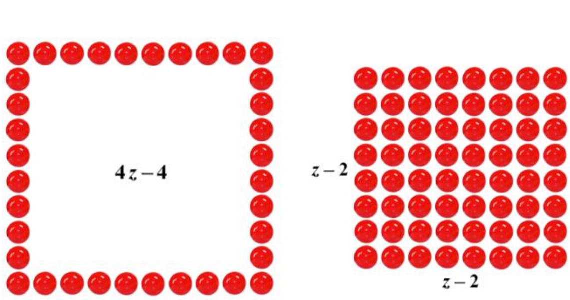
نبدأ بأخذ مربع طول ضلعه عدد طبيعي z ومساحته z^2.



ثم نستخرج منه مساحة المربع الموجود في وسطه، طول ضلعه $z-2$، للحصول على المعادلة البسيطة التالية:

$$z^2 = (z-2)^2 + 4z - 4$$

كما هو موضح في الشكل أدناه:



يكفي بعد ذلك أن نضع

$$4z - 4 = (2t)^2 = y^2,$$

أي

$z - 1 = t^2$، $y = 2t$ و $x = z - 2 = t^2 - 1$.

لنتحصل في الأخير على معادلة فيثاغورس التالية، ذات حلول لا نهائية، يمكن التحقق منها بسهولة

$$(t^2+1)^2 = (t^2-1)^2 + (2t)^2\ ;\quad t \geq 2.$$

الجدول التالي يبرز بعض هذه الحلول:

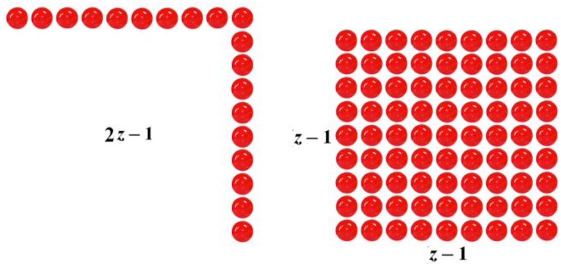
t	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$x = t^2 - 1$	3	8	15	24	35	48	63	80	99	...
$y = 2t$	4	6	8	10	12	14	16	18	20	...
$z = t^2 + 1$	5	10	17	26	37	50	65	82	101	...

في هذه المرحلة يمكن أن نطلب من التلميذ أن يتأكد من أحد هذه الحلول، كأن يختار مثلا $t = 10$، ليحصل على:

$$99^2 + 20^2 = 101^2.$$

الإستراتيجية الثانية

تتمثل الإستراتيجية الثانية في إخراج مساحة المربع الداخلي المتواجد في الجنب الأيسر من المساحة الكلية كما هو موضح في الشكل أدناه.



للحصول على المعادلة البسيطة الجديدة التالية:

$$z^2 = (z-1)^2 + 2z - 1.$$

بانتهاج نفس الأسلوب المتبع في الإستراتيجية الأولى، نضع:

$$2z - 1 = (2t+1)^2 = y^2.$$

أي

$$x = z - 1 = 2t^2 + 2t \text{ و } y = 2t+1 \text{ ، } z = 2t^2 + 2t + 1$$

لنتحصل في الأخير على معادلة جديدة لفيثاغورس، ذات حلول لا نهائية، يمكن أيضا التحقق منها بسهولة:

$$(2t^2+2t+1)^2 = (2t^2+2t)^2 + (2t+1)^2\ ;\quad t \geq 1.$$

فيما يلي جدول لبعض حلول هذه المعادلة:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$x = 2t^2 + 2t$	4	12	24	40	60	84	112	144	...
$y = 2t + 1$	3	5	7	9	11	13	15	17	...
$z = 2t^2 + 2t + 1$	5	13	25	41	61	85	113	145	...

يمكن هنا أيضا أن نطلب من التلميذ أن يتأكد من أحد هذه الحلول، كأن يختار مثلا $t = 8$، ليحصل على:

$$144^2 + 17^2 = 145^2.$$

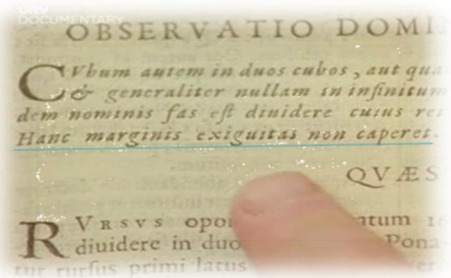
كما يمكنه أيضا أن يتأكد من أنّ الحل المتحصَّل عليه جديد، وهو غير موجود ضمن حلول الإستراتيجية الأولى.

3. حول سؤال فيرما الثاني

لو غيرنا في معادلة فيثاغورس 2 بأي عدد طبيعي $n \geq 3$، نتحصل على المعادلة التالية:

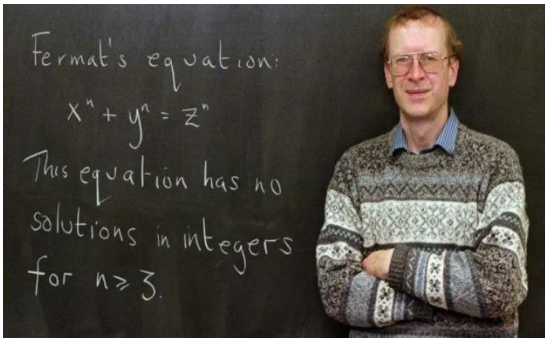
$$x^n + y^n = z^n.$$

سؤال فيرما هو: **هل تبقى للمعادلة حلول طبيعية؟**



كتب فيرما في هامش كتاب كان يقرأه لصاحبه ديوفانتوس الإسكندري Diophantus of Alexandria الموسوم "أريثميتيكا" جملة قصيرة يصرح فيها بأنه ليس للمعادلة حلول طبيعية، غير بديهية، وما كتبه أيضا الجملة التالية:

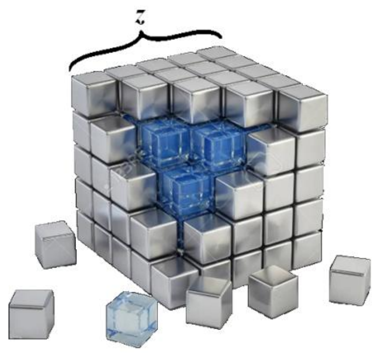
«لدي إثبات رائع للمسألة، لكن الهامش صغير لاحتوائه.»



إلا أنه لم يتم تقديم البرهان الكامل على تصريح فيرما إلا بعد 338 سنة من قبل أندرو وايلز Andrew Wiles عام 1994، باستخدام حجج رياضية بالغة التعقيد، أنشأت تطابقا بين عناصر رياضية تبدو لأول وهلة أنها مستقلة فيما بينها، بعضها ذو طبيعة حسابية كالمنحنيات الناقصية وبعضها الآخر ذو طبيعة تحليلية كالأشكال النمطية، وتمثيلات غالوا Galois.

مشكلة مطروحة للتفكير

هل يمكن للغلاف الخارجي لمكعب طبيعي z^3 أن يشكل هو أيضا مكعبًا طبيعيا؟



بعبارة أخرى، هل يمكن أن تكون للمعادلة التالية حلول طبيعية من أجل $z \geq 3$ ؟

$$z^3 - (z-2)^3 = y^3.$$

بطبيعة الحال فالجواب سيكون بالنفي بناء على نظرية فيرما-وايلز السابقة الذكر، ولكن ما يمكن استنتاجه هو أن المعادلة التالية لا تقبل حلولا طبيعية من أجل $z \geq 3$:

$$6z^2 - 12z + 8 = y^3.$$

4. مشكلة فرعية حول نفس الموضوع

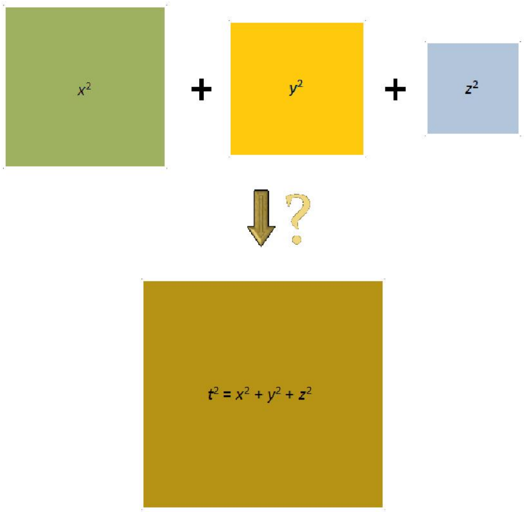
إذا أحدثنا تغييرا بسيطا في معادلة فيثاغورس بإضافة مجهول ثالث كالتالي:

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2$$

ورحنا نبحث عن حلول طبيعية لهذه المعادلة، نكون قد طرحنا مشكلة هندسية جديدة نضعها بين يدي التلميذ نصّها كالتالي:

هل يمكن أن يشكل مجموع ثلاث مساحات لمربعات ذات أضلاع طبيعية، مساحة مربع ذي ضلع طبيعي؟

وهل ذلك ممكن بعدد لا نهائي من الحالات؟

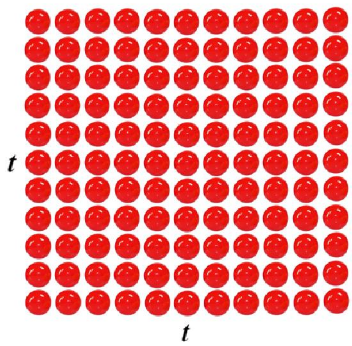


$x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$

المطلوب من التلميذ أن يحذو حذو الاستراتيجيتين السابقتين.

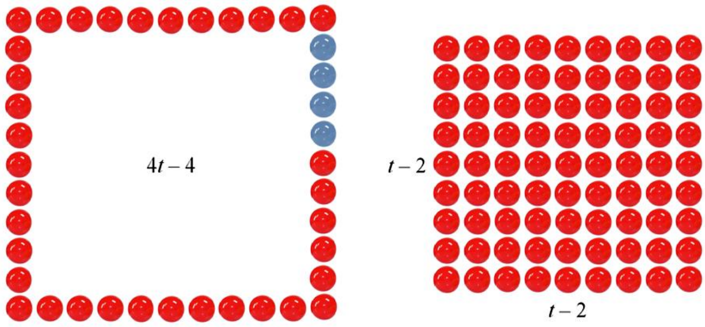
الإستراتيجية الأولى

ننطلق من مربع طول ضلعه عدد طبيعي t ومساحته t^2.



نستخرج منه مساحة المربع الموجود في وسطه، طول ضلعه $t - 2$، للحصول مرة أخرى على المعادلة البسيطة التالية:

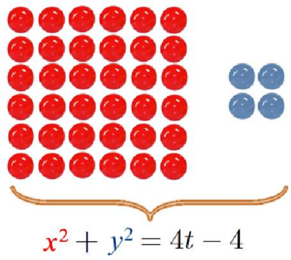
$$t^2 = (t - 2)^2 + 4t - 4.$$



المطلوب بعد ذلك أن نكتب:

$$4t-4=x^2+y^2$$

لتُوافق الشكل التالي:



وذلك ممكن إذا وضعنا:

$$x=2u \text{ ، } y=2v \text{ و } t-1=u^2+v^2.$$

ومنه

$$z=t-1=u^2+v^2.$$

لنتحصل في الأخير على المعادلة التالية، ذات حلول لا نهائية، يمكن التحقق منها أيضا بسهولة:

$$(2u)^2+(2v)^2+(u^2+v^2-1)^2=(u^2+v^2+1)^2\;;\quad u,v\geq 1.$$

بعض هذه الحلول نجده في الجدول التالي:

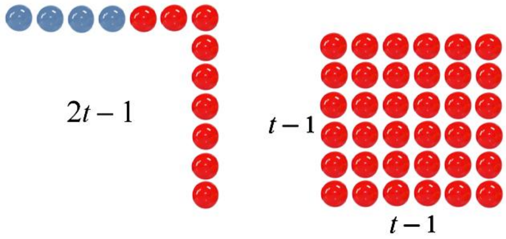
u	1	1	…	2	2	…	3	3	…	20	20	…
v	1	2	…	1	2	…	1	2	…	1	2	…
$x=2u$	2	2	…	4	4	…	6	6	…	40	40	…
$y=2v$	2	4	…	2	4	…	2	4	…	2	4	…
$z=u^2+v^2-1$	1	4	…	4	7	…	9	12	…	400	403	…
$t=u^2+v^2+1$	3	6	…	6	9	…	11	14	…	402	405	…

يمكن للتلميذ أن يتحقق من أحد هذه الحلول، كأن يختار مثلا $u=20$ و $v=2$، ليحصل على:

$$40^2+4^2+403^2=405^2.$$

الإستراتيجية الثانية

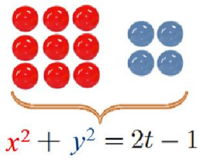
فكرة الإستراتيجية الثانية تتمثل، كما سبق ذكره من قبل، في إخراج مساحة المربع الداخلي المتواجد في الجنب الأيسر من المساحة الكلية كما هو موضح في الشكل أدناه.



يكفي إذن أن نكتب:

$$2t - 1 = x^2 + y^2.$$

لتوافق الشكل التالي:



لذلك نضع

$x = 2u$ ، $y = 2v + 1$ و $2t - 1 = 4u^2 + 4v^2 + 4v + 1$.

ومنه

$t = 2u^2 + 2v^2 + 2v + 1$ و $z = t - 1 = 2u^2 + 2v^2 + 2v$.

لنتحصل في الأخير على المعادلة التالية، ذات حلول لا نهائية:

$$(2u)^2 + (2v + 1)^2 + (2u^2 + 2v^2 + 2v)^2 = (2u^2 + 2v^2 + 2v + 1)^2 ; \quad u, v \geq 1.$$

u	1	1	…	2	2	…	3	3	…
v	1	2	…	1	2	…	1	2	…
$x = 2u$	2	2	…	4	4	…	6	6	…
$y = 2v + 1$	3	5	…	3	5	…	3	5	…
$z = 2u^2 + 2v^2 + 2v$	6	12	…	12	20	…	22	30	…
$t = 2u^2 + 2v^2 + 2v + 1$	7	13	…	13	21	…	23	31	…

للتلميذ أن يتحقق بعد هذه المرحلة من أحد هذه الحلول، كأن يختار مثلا $u = 3$ و $v = 2$، ليتحصل على:

$$6^2 + 5^2 + 30^2 = 31^2.$$

الخلاصة

سمحت لنا هذه المغامرة بأن نعيش تجربة ممتعة لاكتشاف طرق بسيطة، يمكن عرضها على التلاميذ في جميع الأطوار التعليمية لحل مشكلات رياضية تبدو لأول وهلة أنها معقدة، خاصة عندما لا تكون الأدوات المتاحة عند المتلقي قد تم تطويرها بعد. ذلك ما يجعلنا نعتقد أنه من الممكن أن نعرض أي مشكلة رياضية (عندما تكون مطروحة بشكل جيد) بطريقة تحصل معها المتعة والفضول. ويكون الوضع أجمل إذا ما تمت عملية الحل بمرافقة أستاذ يمتاز كما ذكرنا في المقدمة بالحس المرهف، والخيال الواسع، والشخصية القوية، والحماسة المستمرة، بالإضافة إلى التحكم التام في المادة.