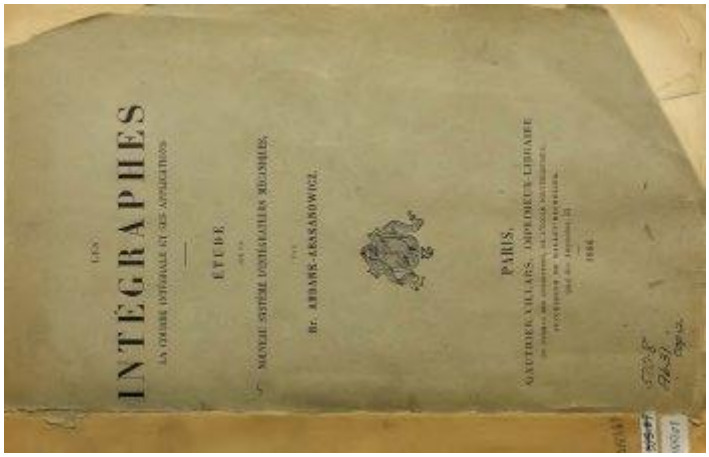
راسم التكامل لـ أبْدَنْكْ أباكانوڤيتش

حمزة خليف
أستاذ متقاعد
hkhelif@gmail.com

أشير أن هذا النص ترجمة (بتصرّف بسيط جدا) لمقال سبق نشره بالفرنسية هنا.

يستعمل النصّ الحروف العربية الإضافية الآتية:

پ (p)، ڤ (g)، ڥ (v)، ب (é، è، e،...)، ۏ (e، eu، œ)، ۋ (u).



من بين العديد من المرِبّعات التي يعرفها عالَم المنحنيات، أي المنحنيات المستوية التي تسمح بتربيع الدائرة، نجد مربِّعة أبْدَنْكْ أباكانوڤيتش التي يمكن رسمها باستخدام أداة تكامل وهي راسم التكامل لأبْدنْكْ أباكانوڤيتش، أو، لِمَ لا، رستكامل أبْدنْكْ أباكانوڤيتش.

1. ظهور المرِبّعات

يمكن أن يلاحظ قارئ أصول إقليدس أن جميع الإنشاءات الهندسية التي وردت في هذا الكتاب تمّت بواسطة المسطرة والبيكار. حتى قبل إقليدس كان علماء الرياضيات اليونانيون مهتمين بهاتين الأداتين. إن فكرة قابلية الإنشاء (التي ستعني، من الآن فصاعدًا، بواسطة المسطرة والبيكار) لعدد حقيقي أو مركّب بشكل عام، أدت إلى حقل الأعداد القابلة للإنشاء. ومع ذلك، ففي وقت مبكر من القرن الخامس قبل الميلاد، ظهرت مشكلات غير قابلة للحلّ باستخدام المسطرة والبيكار. أشهرها بالإجماع هي:

1- تربيع الدائرة، أي إنشاء (ضلع) مربّع له نفس مساحة قرص معيّن بواسطة المسطرة والبيكار.
2- مضاعفة المكعّب، أي إنشاء (حافة) مكعّب له حجم يساوي ضعف حجم مكعّب معيّن.
3- تثليث أو بالأحرى أثلثة زاوية، أي الإنشاء بالمسطرة والبيكار، لنصفي المستقيم اللذين يقسمان زاوية معيّنة إلى ثلاث زوايا من نفس القياس.

استحالة تربيع الدائرة، أي استحالة إنشاء قطعة طولها $\sqrt{\pi}$ (أو طولها π) بمعرفة العدد 1، تم إثباتها فقط في عام 1882 من طرف لِيندمان Lindemann (1).

بالنسبة إلى مضاعفة المكعّب التي تعود إلى الإنشاء، بالمسطرة والبيكار، لقطعةٍ طولها $\sqrt[3]{2}$ ، فقد تم تبيان أن هذا الإنشاء مستحيل أيضًا (2).

ولا يمكن أثلثة زاوية باستخدام المسطرة والبيكار إلا في حالات معيّنة (3).

أيّ منحنٍ يجعل حلّ مشكلة تربيع الدائرة ممكنا، بعبارة أخرى، أيّ منحن يشمل نقطة يساوي أحد إحداثيها π أو أحد مضاعفاته أو أحد مضاعفاته الجزئية، يسمى مربِّعة.

يُسنَد إلى هيبياس إيليس Hippias of Elis إدخال المنحني الأول في الرياضيات، والذي يأتي مباشرة بعد المستقيم والدائرة. بروكلوس Proclus ومعلّقون آخرون ينسبون إليه المنحني الذي يسمى منذ ذلك الحين، مُثْلِثة (منحن يسمح بأثلثة زاوية) أو مربِّعة هيبياس. في الحقيقة كان دينوستراتوس Dinostratus أولَ من لاحظ أن مثلثة هيبياس هي مربِّعة. حلّ شقيقُه مينايخموس Menaechmus مشكلة مضاعفة المكعّب.

2. سلف المربّعات: مربّعة هيبياس، المعروفة بمربّعة دينوستراتوس

نظرًا إلى أن هذا المنحني هو سلف المربّعات، فسيكون من العدل أن يحظى ولو بقليل من التشريف.

إن مربّعة دينوستراتوس هي مسار نقطة لها سرعةٌ زاوية ثابتة بالنسبة إلى نقطة ثابتة ومركّبةٌ لشعاع سرعتها ثابتة. إنها أيضًا مسار نقطةِ تلاقي مستقيم في انسحاب منتظم ومستقيم في دوران منتظم (الشكل 1).

معادلةٌ لهذا المنحني في الإحداثيات القطبية، عندما تكون النقطة الثابتة هي O والمركبة الثابتة لشعاع السرعة هي تلك المتعلقة بـ Ox هي

$$\rho = \frac{2a}{\pi}\frac{\theta}{\sin\theta}$$

حيث a عدد حقيقي غير منعدم.

في الإحداثيات الديكارتية هذا المنحني معرّف بالتوسيط

$$t \mapsto \left(\frac{2at}{\pi}\cot t, \frac{2at}{\pi}\right).$$

نلاحظ أنه إذا أخذنا بعين الاعتبار التوسيط المركّب $z(\theta) = a\frac{\theta}{\sin\theta}e^{i\theta}$ ،

فسيكون

$$\frac{z(\theta)+|z(\theta)|}{2} = z\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

صورة المتتالية (u_n) المعرّفة بـ $u_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$ وبعلاقة التراجع $2u_{n+1} = u_n + |u_n|$ محتواة في المربّعة المعرّفة بـ

$$\rho = \rho_0 \frac{\sin\theta_0}{\theta_0}\frac{\theta}{\sin\theta}$$

ونهايتها هي

$$\rho = \rho_0 \frac{\sin\theta_0}{\theta_0}.$$

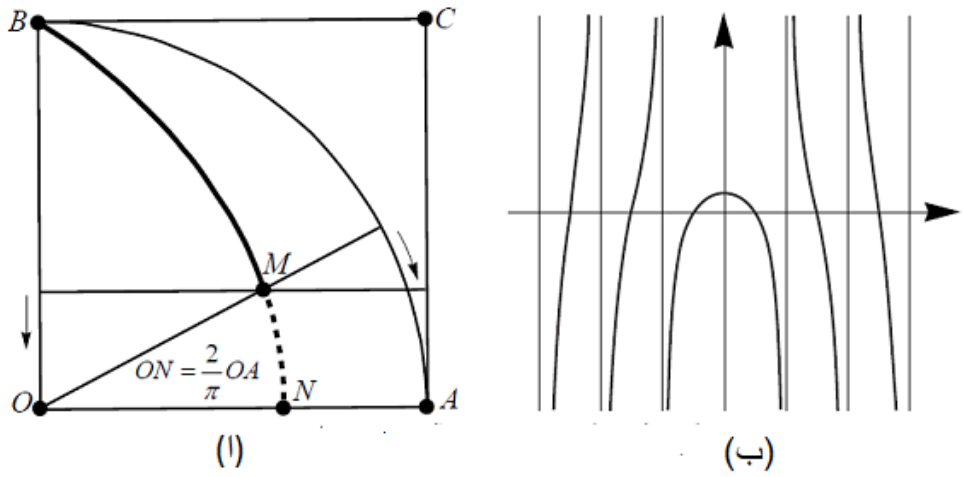
من أجل $a = 1$ لدينا

$$\lim_{t\to 0}(x(t), y(t)) = \left(\frac{2}{\pi}, 0\right),$$

ما يسمح بإنشاء القطعة التي طولها $\frac{\pi}{2}$ (4) ثم تربيع الدائرة (5).

تمّ اختراع هذا المنحني ليكون مثلِثةً كما هو موضّح أعلاه، ولكن لحسن حظ الهندسة، فقد أدّى أيضًا خدمةً لتربيع الدائرة، بل والأفضل من ذلك، أنه لعب دور الـn– مُقسّمةٍ لزاوية.

للحصول على تفاصيل أكثر يمكن العودة إلى هنا أو إلى هنا.



الشكل 1

(ا) مسار نقطة تلاقي BC (في حالة انسحاب) مع OB (في حالة دوران)

(ب) مربّعة دينوستراتوس بعد التحويل $(x, y) \mapsto (y, x)$.

3. لمحة على رواسم التكاملات

أسلاف رواسم التكامل هي المكامِلات الميكانيكية، وهي الأدوات التي يعود أصلها إلى بداية القرن التاسع عشر والتي تؤدّي، في ظل ظروف معيّنة وبوسائل ميكانيكية بحتة، جمع سلسلة غير منتهية من المقادير غير المنتهية في الصغر. يمكن أن تكون هذه الكميات عناصرَ مساحةِ سطحٍ يحده منحن، أو أيَّ كمية معقدة، أو عملا ميكانيكيا، أو حرارةً، أو طاقةً كهربائية، إلخ.

في كل هذه الأدوات، يقتصر دورها في البحث عن نتيجة مكامَلة و" تقريبا جميع" المشكلات التي تنشأ في العلوم التطبيقية يمكن اختزالها في حساب مساحة ما.

تنقسم أجهزة المكاملة هذه إلى مبدأين أساسيين يتوافقان مع مظهري التكامل؛ إما أن يُجريَ المرء تربيعًا، أي يقوم بتقويم مساحة المنطقة الواقعة أسفل منحن عن طريق تقسيمها إلى مجموع غير منته من الأشكال الأولية الصغيرة، أو أن يحلّ مشكلة عكسية للمُماسّات، أي أنه يُنشئ منحنيا يكون المعامل الموجّه لمماساته مُعطى. المكامِلات من النوع الأول، والتي تستخدم بشكل أساسي لقياس مساحة سطح يحده منحن مغلق، تسمى "مماسيح" (جمع مِمساح أي قائس مساحات). أما مكامِلات النوع الثاني، فيطلق عليا اسم رواسم التكامل أو الـ"رستكاملات" كونها تسمح برسم منحن تكاملي لمنحن معطًى بطريقة مستمرة.

إن رواسم التكاملات هي مكامِلات لا تقوم فقط بإجراء المجموع الكلي للعناصر، ولكنها تعطي أيضًا، في شكل رسم بياني لمنحن ليس شيئا آخر سوى منحن تكاملي، القانونَ الكامل الذي يحكم هذا التجميع. يمكنها مكاملةَ (حلّ) معادلات تفاضلية ابتدائية.

4. مربعة أبْدَنْكْ أباكانوڤيتش ورستكامله

تجدر الإشارة إلى أن عمل ليندمان حول تسامي العدد π أظهر أنه ليس فقط من المستحيل "إنشاء" هذا العدد باستخدام المسطرة والبيكار، ولكن أنه لا يوجد أيّ منحن من درجة أعلى، معرّفٍ بواسطة معادلة جبرية ذات معاملات صحيحة، بالنسبة إليه يكون π الترتيبَ المقابل لقيمة ناطقة للفاصلة. ويترتب على ذلك أن إنشاء π لا يمكن تنفيذه إلا بمساعدة منحن متسام، وللقيام بذلك يجب على المرء أن يستخدم، باستثناء المسطرة والبيكار، أداة "متسامية" ترسم المنحني بحركة مستمرة. أولى الأدوات من هذا القبيل هي راسم التكامل (الشكل 2) الذي اخترعه ووصفه المهندس أبْدَنْكْ أباكانوڤيتش Abdank-Abakanowicz وصمّمه كورادي من زيوريخ.

> Nous avons donné le nom d'*intégraphes* à ce nouveau genre d'intégrateurs, que nous croyons pouvoir affirmer avoir été les premiers à construire. B. Abdank-Abakanowicz.
>
> المرجع 1، ص. vi. (6)
>
> لقد أطلقنا اسم "الرستكاملات" على هذا النوع الجديد من المُكاملات، والذي نعتقد أنه يمكننا التأكيد على أننا أول من أنشأه. أبْدَنْكْ أباكانوڤيتش.

تتيح هذه الأداة إمكانية إنشاء منحن تكاملي تحدده المعادلة

$$Y = F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

بمعرفة المنحني التفاضلي المحدد بالمعادلة

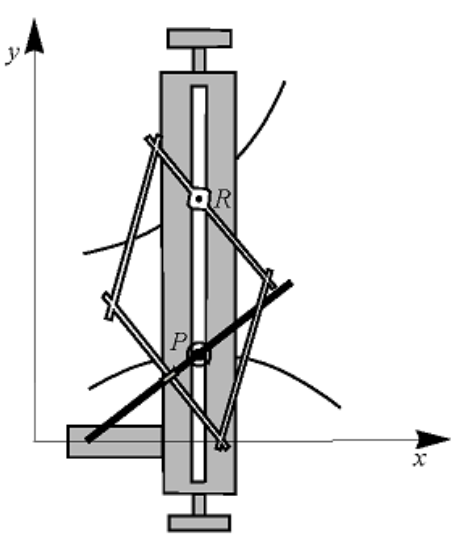
$$y = f(x).$$

عندما يتم تحريك الجهاز المفصلي الخاص برواسم التكاملات بحيث تمسح نقطة التوجيه P المنحني التفاضلي، فإن نقطة التتبع R تصف المنحني التكاملي (الشكل 3).

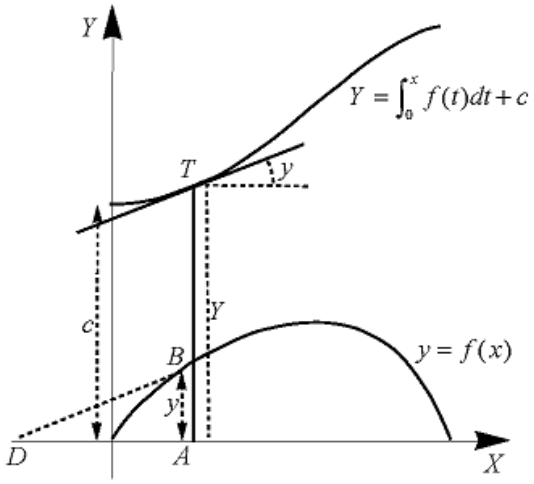
نصف بإيجاز أدناه المبدأ الرياضياتي الذي يعتمد عليه راسم التكاملات.

لنفترض أن B هي نقطة ما على المنحني المحدد بالمعادلة $y = f(x)$. نقوم بإنشاء المثلث القائم الذي رؤوسه $B(x,y)$، $A(x,0)$ و $D(x-1,0)$. ADB ظل الزاوية، أي معامل توجيه المستقيم (DB) يساوي y.

إذن (BD) يوازي مُماسَّ المنحني التكاملي في النقطة $T(X,Y)$ المقابلة للنقطة $B(x,y)$.



الشكل 2



الشكل 3

فيما يأتي وصف آخر لمبدأ عمل رستكامل أبْدَنْكْ أباكانوڤيتش بقلم موريس دوكانْيوّ، في كتابه *Calcul graphique et nomographie*, Paris : O. Doin ; 2ème éd. Revue et corrigée, 1914 ; 3ème éd., 1924. (راجع المرجع 4)

ينزلق كوس متحرك SmM على طول محور الفواصل Ox. يتم أخذ الجانب Sm كوَحدة للطول. على طول الجانب mM يمكن أن ينزلق:

1) مؤشر M، منخرط فضلا عن ذلك في مزلاق قضيب SM يدور بحرية حول S؛

2) المركز M_1 لدُحروجة R مضغوطة بشكل كافٍ على المستوى الأفقي الذي يرتكز عليه الجهاز.

يتم توصيل المحور A_1B_1 للدحروجة R بواسطة متوازي أضلاع مفصلي بقضيب AB عمودي على القضيب SM، بحيث يكون مستوي دوران الدحروجة موازيًا دائمًا لـ SM. عندما نتبع بالمؤشر M منحنيا معطى $\mathscr{C}$ معادلته $y = f(x)$، تغلّف الدحروجة R منحنيا $\mathscr{C}_1$ يظل مماسه موازيًا لـ SM في كل لحظة.

نظرًا إلى أن $Sm = 1$، فإن ميل هذا المماس ليس سوى الترتيب $mM = f(x)$ للمنحني $\mathscr{C}$. وبالتالي، فإننا نرسم منحنيا $\mathscr{C}_1$ يكون ميله يساوي باستمرار $f(x)$: هذا هو الرسم البياني لدالة أصلية لـ f (الشكل 4).

بشكل أكثر عمومية، يتيح راسم التكاملات لأبْدَنْكْ أباكانوڤيتش إمكانية إنشاء منحن (تكاملي) محدد بواسطة التمثيل الوسيطي

$$X = x(t), Y = \int_0^t y dx = \int_0^t y(u)x'(u)du$$

مرتبط بمنحن (تفاضلي) معطى محدد بواسطة التمثيل الوسيطي

$$X = x(t), Y = y(t).$$

لإنشاء π، أي لتربيع الدائرة، فإننا نعتبر (الشكل 5) المنحني التفاضلي (الدائرة) المحدد بواسطة المعادلة

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

أو بطريقة مكافئة عن طريق التمثيل الوسيطي

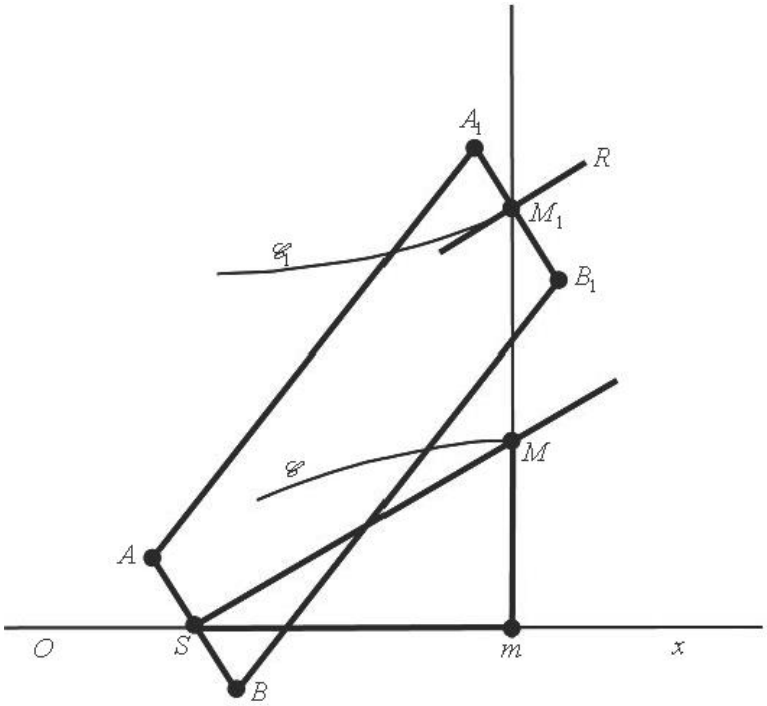
$$x(t) = r\sin t, y(t) = r\cos t$$

ومنحنيه التكاملي المحدد بالمعادلة

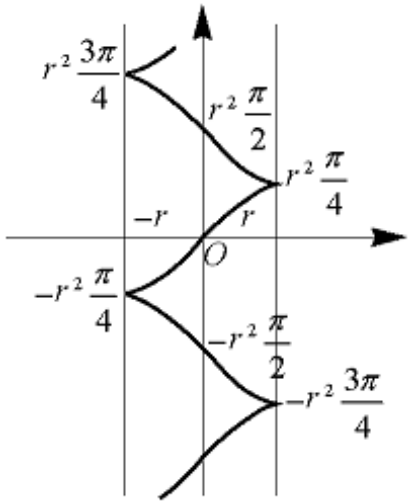
$$Y = \frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r} + \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2}.$$

أو بالتوسيط

$$x = r\sin t, y = \frac{r^2}{2}(t + \sin t\cos t).$$



الشكل 4



الشكل 5

بالنسبة إلى $r = 1$ ، يحتوي المنحني على النقط $(1, \pi/4)$ ، $(0, \pi/2)$ ، $(0, \pi)$ ، إلخ.، أي أنه يسمح بتربيع الدائرة. لذلك فهو مربّعة يطلق عليها اسم مربعة أبْدَنْكْ أباكانوپيتش أو تكامل دائرة.

مساحة الجزء المظلَّل من الشكل 6 تساوي HM.

لدينا بالفعل، $P(r\sin t, r\cos t)$، $M\left(r\sin t, \frac{r^2}{2}(t+\sin t\cos t)\right)$، وبافتراض $0<t<\frac{\pi}{2}$،

$$\tan(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OP})=\frac{\cos t}{\sin t}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right).$$

مساحة القطاع الدائري OPA هي

$$A_1=\frac{r^2 t}{2},$$

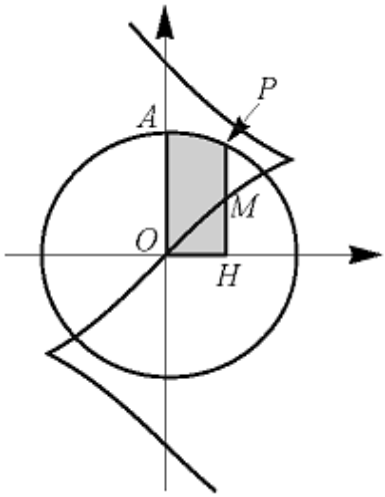
ومساحة البسيط (المثلث المملوء) OHP تساوي

$$A_2=\frac{r^2\sin t\cos t}{2}.$$

ومنه النتيجة المذكورة، أي

$$A_1+A_2=HM$$

التي تبقى صحيحة من أجل $t=0$.



الشكل 6

5. التعليقات

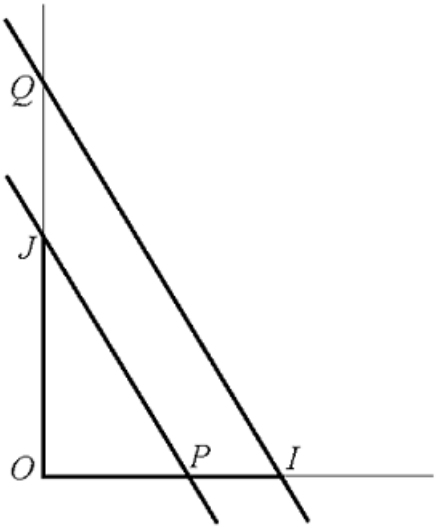
(1) العدد π متسام، أي غير جبري: لا يوجد كثير حدود ذو معاملات ناطقة يكون π صفرًا أي جذرا له. في عام 1873، أثبت هيرميت Hermite أن أساس اللوغاريتم الطبيعي، يعني العدد e، متسام. في عام 1882، عمّم ليندمان استدلاله إلى مبرهنة (مبرهنة هيرميت - ليندمان) وهي التي تنصّ على أنه إذا كان α جبريًا وليس منعدما، فإن العدد e^{α} متسام. لكن $e^{i\pi}$ ليس متساميا (لأنه يساوي $\cos\pi+i\sin\pi=-1$). بالعكس النقيض (العكس النقيض لعلاقة $p\Rightarrow q$ هو العلاقة $\overline{q}\Rightarrow\overline{p}$، ويمكن دون عناء تبيان أن هاتين العلاقتين متكافئتان)، $i\pi$ ليس جبريًا وبالتالي فإن π متسام، نظرا إلى أن i جبري ($i^2+1=0$). أخيرًا، وفقًا لمبرهنة فانتزل التي تثبت، على وجه الخصوص، أن أيَّ عدد يمكن إنشاؤه (باستخدام المسطرة والبيكار) هو عدد جبري، فإن π غير قابل للإنشاء.

(2) العدد $\sqrt[3]{2}$ غير قابل للإنشاء بموجب مبرهنة فانتزل، لأنّ درجته (ثلاثة) ليست قوة للعدد 2 على الرّغم من كونه جبريا (هو صفر لـ X^3-2).

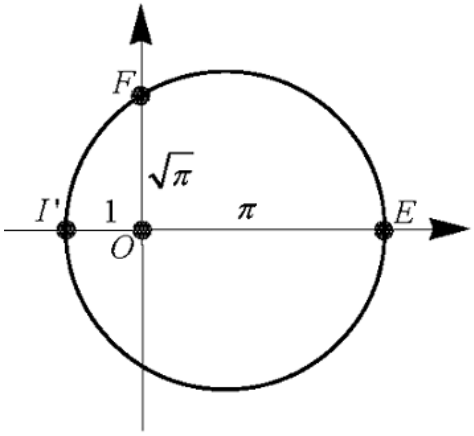
(3) الزوايا القابلة للأثلثة هي تلك التي يكون أحد قياساتها، وليكن α، بحيث يكون كثير الحدود $X^3-3X-2\cos\alpha$ غير قابل للاختزال (غير قابل للتحليل) على الحقل $\mathbf{Q}(\cos\alpha)$ المكوّن من كل الأعداد الحقيقية من الشكل $a+b\cos\alpha$ حيث a و b ينتميان إلى $\mathbf{Q}$.

(4) نعتبر في معلم متعامد ومتجانس النقط $I(1,0)$ و $J(0,1)$ و $P(2/\pi,0)$. المستقيم الموازي لـ (PJ) والذي يمر من I يلتقي محور التراتيب في Q بحيث $OQ/OJ=OI/OP$ وفقًا لطالِس (الشكل في الأسفل). ومنه

$$OQ=\frac{1}{OP}=\frac{\pi}{2}.$$



(5) نقوم بإنشاء دائرة قطرها $I'E$ حيث I' هي النقطة التي إحداثياها $(-1,0)$ و E النقطة التي إحداثياها $(\pi,0)$. تلتقي هذه الدائرة بمحور التراتيب في نقطة F ترتيبها موجب، ولدينا $OF=\sqrt{\pi}$ (الشيء الذي يأتي من حقيقة أن $OF^2=OI'.OE$ حسب خاصية الارتفاع المتعلق بالوتر في مثلث قائم، أو من قوة النقطة O بالنسبة إلى الدائرة.)، أيْ ضلع مربع مساحته هي مساحة قرص شعاعه (نصف قطره) 1 (الشكل في الأسفل).



(6) كان الرياضياتي الفرنسي ڤوستاڤ ڤاسپار كوريوليس أولَ من وصف في عام 1836 المبدأ الأساسيَّ الذي يستند إليه راسم التكامل الميكانيكي، في

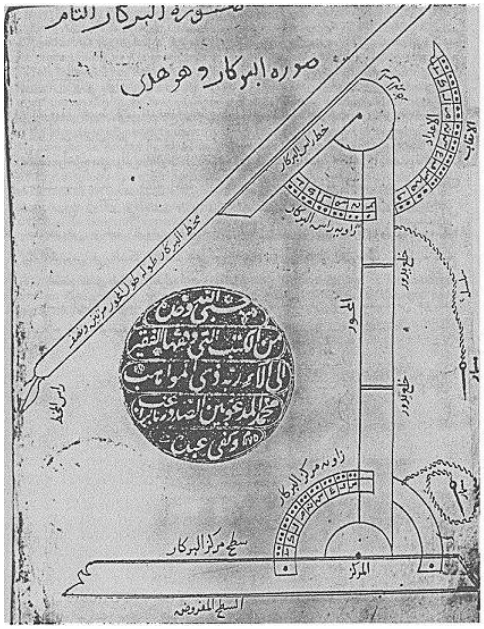
Le *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* ou le *Journal de Liouville*, Paris, 1836.

بعض المصطلحات المستعملة

أثلثة زاوية Trisection d'un angle	مثلثة Trisectrice
بُسَيّط Simplexe	مربّعة Quadratrice
تربيع الدائرة La quadrature du cercle	مضاعفة المكعّب La duplication du cube
رستكامل (راسم تكامل) Intégraphe	مكامل Intégrateur
متسام Transcendant	ممساح Planimètre

المراجع

1. Bruno Abdank-Abakanowicz, Les intégraphes. La courbe intégrale et ses applications, Gautier-Villars, 1886.
2. Felix Klein, Leçons sur certaines questions de Géométrie élémentaire. Rédaction française par J. Griess. Paris, Librairie Nony et Cie, 1896.
3. Henry Lossier, L'Intégraphe Abdank Abakanowicz, Bulletin Technique de la Suisse Romande, No. 10, 20 Novembre 1900, p. 81-83.
4. Dominique Tournès, Du compas aux intégraphes : Les instruments du calcul graphique, Reperes – Irem. N° 50 – Janvier 2003.



صفحة من كتاب الكوهي في البركار التام