# منطق جزيرة الفرسان والخدم

ناجي هرماس
أستاذ بقسم الرياضيات، جامعة زيان عاشور، الجلفة
nadjihermas@gmail.com

## تمهيد

يُعدّ الفيلسوف اليوناني أرسطو Aristotle أول من قدّم نظاما مُسلّماتيا للاستدلال، والذي أصبح سريعا منهاجا متّبعا فيما يعرف بالنُظم الفكرية الاستنباطية للوصول إلى الحقيقية. وفي هذا النوع من الفكر تُعتبر الحقيقة قرينة للبرهان، فالحق ما تمّ الوصول إليه باستخدام قواعد الاستدلال، لا غير. إن النشاط الذهني المُؤسِس للبراهين، والذي يُمارس بكثرة في إطار الفكر الاستنباطي، يدعى البرهنة provability.

وتمثل النظريات الرياضية mathematical theories أوضح النماذج للفكر الاستنباطي، والتي قدّم لها فريجه Frege في كتابه «Begriffschrift» الصادر في عام 1879، نظاما مُسلّماتيا حديثا للبرهان. ولاحقا نُوقشت أنظمة أخرى للبرهنة في أعمال راسل Russell، وبخاصة في كتابه المشهور «مبادئ الرياضيات»، والذي ألّفه مشاركةً مع وايتهيد Whitehead خلال السنوات 1910-1913. وفي سنوات الثلاثينيات التالية، قدّم جينتزن Gentzen نُظمًا جديدة تماما للبرهنة متمثلة في نظم الاستنتاج الطبيعي والحساب التتابعي sequent calculus. وقد أغنت هذه النظم نظرية البراهين بأساليب بديعة في الاستدلال والاستنباط، الأمر الذي أحدث نشاطا متّقدا في عمليات البرهنة المختلفة. ولعل أبرز نجاح سريع لهذه النُظم تمثل في الإنجاز الذي قام به جينتزن، وهو إثباته في عام 1936 خلوّ النظرية الصورية للأعداد الطبيعية من التناقض. وكما هو معروف فقد أظهرت لنا مبرهنة عدم الاكتمال الثانية لغودل Gödel عجز تقنيات براهين هيلبرت Hilbert ذات الطابع المنتهي عن حسم هذه المسألة.

ويجب الإشارة إلى أنه يوجد فرق مهم بين نظرية البراهين ونظرية البرهان التي تم تأسيسها خلال النصف الأول من القرن العشرين؛ فالنظرية الأولى تُعنى بتطوير تقنيات البرهنة الرياضية، بينما تعنى الثانية بتطبيق هذه التقنيات في دراسة النظريات الرياضية المختلفة، وبالأخص تلك الصورية منها. وتُطرح غالبا في هذه النظرية الأسئلة التالية: هل النظرية الفلانية متّسقة (أي خالية من التناقض)؟ وهل هي كاملة؟ وإذا كانت كذلك، فهل مسلماتها الأساسية مستقلة منطقيا؟ وإذا كانت النظرية أ متسقة، فهل النظرية ب كذلك؟ وإذا كانت النظرية ت كاملة، فهل النظرية ث هي الأخرى كاملة؟ إلى آخر ذلك. ووفق هذا المنظور تُعدّ نظرية البرهان جزءا أساسيا من ″ما وراء الرياضيات″ أو ما يسمى باللغة الإنكليزية Metamathematics، وهو فرع الرياضيات الذي يُعنى بـ"صَوْرَنة" أو "شَكْلَنة" formalizing النظريات الرياضية.

عندما وضع إقليدس Euclid قبل ألفي عام مسلماته الشهيرة الخاصة بالهندسة المستوية، فإنه بذلك أنشأ تقليدا جديدا في ممارسة التفكير الرياضي، والذي أصبح يعرف منذ نهاية القرن التاسع عشر بالنهج الاستنباطي المُسلَّماتي. وبفضل جهود هيلبرت الذي كان متأثرا حتى النخاع بإقليدس، سادت الطرائق الاستنباطية المسلماتية في الوقت الحالي الرياضيات برمتها، الأمر الذي أدى إلى نشوء النظريات الرياضية ذات الطابع العمومي والمكوّنة للهيكل الرئيسي للرياضيات الحديثة. وتُنفّذ هذه الطرائق على النحو الآتي: يتم الاتفاق مبدئيا على صحة قضايا معينة، والتي تُدعى مسلّمات، ثم يُعتمد على قواعد برهان يُتفق عليها أيضا هي الأخرى للوصول إلى الصيغ الصحيحة انطلاقا من

هذه المسلّمات. ويمثل الاستنتاج الطبيعي والحساب التتابعي والبرهان الرياضي الهيلبرتي في الوقت الحالي جوهر النهج الفكري المشار إليه آنفا.

فيما يلي نقدم في إطار اللغة العربية نظاما استنباطيا بسيطا وصلبا، وسنرى كيف أنه للحفاظ على اتساقه وعدم تناقضه، ينبغي علينا القبول بعدم اكتماله، الأمر الذي يتوافق تماما مع ما تخبرنا به مبرهنة عدم الاكتمال الأولى لغودل.

العربية ليست فقط لغة للشعر والأدب حيث تروج بضاعة المبالغة والخيال وربما الكذب الممزوج بالعاطفة، وإنما هي أيضا لغة أصيلة وراقية، وقادرة مثل غيرها على احتواء الفكر العقلاني الاستنباطي ووصف النظريات الرياضية الصورية الدقيقة.

## 1. وضع قواعد لفكر استنباطي منطقي

لنتخيل معا وجود جزيرة يقطنها صنفان من الناس هما "الفرسان" و"الخدم". ويفترض تحقق الشرطين التاليين "يصرح الفرسان دائما بالصدق" بينما "يصرح الخدم دائما بالكذب"، ولا يمكن لأي قاطن للجزيرة أن يحمل في آن واحد صفتي الفارس والخادم.

يزور الجزيرة عالِم منطق، والذي يشار إليه هنا باسم "المنطقي"، وسيتقيد بالقواعد الفكرية التالية: لا يصدّق سوى الجمل اللغوية الصحيحة نحويا والمعبِّرة عن حقيقة واقعة في الجزيرة (فكر المنطقي صلب)؛ ولا يصدّق أبدا الجملة اللغوية ونقيضها (فكر المنطقي مُتسِّق)؛ ويستخدم في استدلالاته المنطقية كل المبادئ التوتولوجية المعتادة والمقبولة في جميع الحجج والمقاربات المنطقية؛ ولا يقبل بالحجج الحدسية لوحدها.

يصرّح أحد السكان للمنطقي بجملة لغوية سليمة نحويا، وهنا يُطرح سؤالان: هل الجملة المُصرَّح بها قابلة للتصديق من قبل المنطقي؟ وهل يمكن أن يعرف من خلالها صفة المصرِّح؟

إن الاختصارات الرمزية، وهي الأسلوب الشائع في الرياضيات، تساعد كثيرا على إنجاز الاستدلالات المنطقية بسهولة ويسر، وعلى هذا الأساس سيعتمدها المنطقي في مقارباته على النحو الآتي:

$\mathcal{K}$، المُصرِّح فارس؛

$\mathcal{S}$، المُصرِّح خادم؛

$\mathcal{D}$، الجملة اللغوية المصرَّح بها.

استنادا إلى قواعد التفكير المتفق عليها آنفا يصدّق المنطقي بالجمل اللغوية:

$\mathcal{K} \vee \mathcal{S}$ ($\mathcal{K}$ أو $\mathcal{S}$)، المصرّح فارس أو خادم؛

$\neg(\mathcal{K} \wedge \mathcal{S})$ (النفي المنطقي للجملة $\mathcal{K} \wedge \mathcal{S}$ ($\mathcal{K}$ و $\mathcal{S}$))، لا يمكن أن يكون المصرّح فارسا وخادما في آن معا؛

$\mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{D}$، إذا سُلِّم بأن المصرّح فارس، فإن الجملة $\mathcal{D}$ صادقة؛

$\mathcal{S} \Rightarrow \neg\mathcal{D}$، إذا سُلِّم بأن المصرّح خادم، فإن الجملة $\mathcal{D}$ كاذبة.

لنلفت الانتباه هنا إلى أن الرموز $\vee$ و$\wedge$ و$\neg$ مطابقة تماما على التوالي للكلمة "أو" ولواو العطف "وَ" و"لا" النافية، وبذلك فإنها تنتمي إلى اللغة العربية المجسّدة في أبجديتها وجميع جملها الصحيحة نحويا، وليس إلى لغة رياضية رمزية، وفائدتها تكمن لا أكثر ولا أقل في تحقيقها للاختصار المُعين على مزاولة الفكر المنطقي الاستنباطي.

وفقا للقواعد المتفق عليها فإن الجملتين التاليتين صادقتان:

$\neg\mathcal{K} \Leftrightarrow \mathcal{S}$، المُصرّح ليس فارسا إذا، وإذا فقط، كان خادما؛

$\mathcal{K} \Leftrightarrow \mathcal{D}$، إذا سُلِّم بأن المُصرِّح فارس، فإن $\mathcal{D}$ صادقة، وبالعكس، إذا سُلِّم بصدق $\mathcal{D}$، فإن المصرّح بها فارس.

يعرف المنطقي أن الجملة اللغوية "أنا خادم" لا يمكن أن تصدر عن أحد من قاطني الجزيرة، بخلاف نقيضها، وهي الجملة اللغوية "أنا فارس"، والتي يحتمل صدورها عن أحد ما في الجزيرة، وإذا تحقق ذلك، فإنها تكون صادقة إذا صدرت عن فارس وكاذبة إذا صدرت عن خادم.

## 2. الجملة اللغوية المحدثة لكارثة في فكر المنطقي

لا يوجد من حيث المبدأ مانع من أن يصرّح أحد قاطني الجزيرة بالجملة اللغوية "لا يمكنك أن تصدّق أبدا بأني فارس"، وعلى هذا الأساس يمكننا الافتراض بأنها حقا جملتنا اللغوية $\mathcal{D}$، فماذا عسى المنطقي أن يتصرف حيالها؟

إذا سلّم مؤقتا بأن $\mathcal{D}$ كاذبة، أي إذا صدق مؤقتا بالجملة اللغوية "يمكنك أن تصدّق بأني فارس"، فإنه يصبح مجبرا على الإقرار بأن المصرح بها ليس فارسا، أي عليه أن يصدق بالجملة اللغوية $\neg\mathcal{K}$، وبالتالي فإن المنطقي "لا يمكنه أن يصدق أبدا بأن المصرح فارس"، الأمر الذي يعني أنه مجبر كذلك على التصديق بصحة $\mathcal{D}$، ومن هنا يصدق حتما بالجملة $\neg\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D}$. وبما أنه يصدق بجميع المبادئ التوتولوجية، والتي تتضمن مبدأ الإثبات بفصل الحالات، فإن ذلك يدفعه حتما للتصديق بالجملة $\mathcal{D}$، وهذا معناه أنه لن يصدق أبدا بأن المُصرِّح فارس. لكن لنلاحظ من ناحية ثانية أن صدق الجملة $\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{K}$ يخبرنا بصدق $\mathcal{K}$، أي بأن المصرّح فارس، فما الذي يحدث هنا؟

في الحقيقة لقد تم اختيار الجملة $\mathcal{D}$ بعناية فائقة لإحداث كارثة في فكر المنطقي، وعلينا الإقرار بما يلي: إذا تم التصريح بالجملة اللغوية "لا يمكنك أن تصدق أبدا بأني فارس" من قبل أحد قاطني الجزيرة، فإنه حتما فارس، بيد أن المنطقي ليس بمقدوره التصديق بذلك.

تنتمي الجملة اللغوية "لا يمكنك أن تصدق أبدا بأني فارس" بامتياز إلى الفكر ذاتي المرجعية، وذلك لكونها سلبت الصدق من الجملة اللغوية "أنا فارس". ولعل هذا المثال يكشف لنا عن بعض خطورة الفكر ذاتي المرجعية، والمنتشر كثيرا في المنطق اليومي للناس وفي الفلسفة والفكر والسياسة والأدب والشعر.

## 3. النقاط الصامدة المحدثة لكارثة في فكر المنطقي

لتكن $\mathcal{B}(\mathcal{P})$ هي الجملة اللغوية "المنطقي يصدق في لحظة ما بالجملة $\mathcal{P}$". وبالتالي فإن الجملة اللغوية $\neg\mathcal{B}(\mathcal{P})$، وهي نقيض الجملة السابقة، هي "المنطقي لن يصدق أبدا بالجملة $\mathcal{P}$"، وكحالة خاصة فإن الجملة $\neg\mathcal{B}(\mathcal{K})$ هي "المنطقي لن يصدق أبدا بأن المُصرِّح فارس"، وهي عين الجملة اللغوية التي أحدثت كارثة في فكر المنطقي.

وإذا افترِض بأن الجملة المصرح بها $\mathcal{D}$ هي $\neg\mathcal{B}(\mathcal{P})$، فإنه يكون لدينا $\mathcal{K} \Leftrightarrow \neg\mathcal{B}(\mathcal{P})$، وكحالة خاصة إذا كانت $\mathcal{D}$ مطابقة للجملة $\neg\mathcal{B}(\mathcal{K})$ فإن لدينا $\mathcal{K} \Leftrightarrow \neg\mathcal{B}(\mathcal{K})$، وهو ما يعني أن الجملة اللغوية $\mathcal{K}$ هي نقطة صامدة للدالة $\mathcal{P} \mapsto \neg\mathcal{B}(\mathcal{P})$.

في نظرية الكوارث الرياضية يُنظر إلى النقاط الحرجة والنقاط الصامدة على أنها كوارث من النوع الأول، ولعل المثال الذي تم إيراده سابقا يعطي تبريرا لهذه التسمية.

لتكن $\mathcal{P}$ جملة لغوية ما، ولنفرض بأن المنطقي يُسلِّم بصدق الجملة $\mathcal{P} \Rightarrow \neg\mathcal{B}(\mathcal{P})$. إذا سلّم مؤقتا بصدق $\mathcal{B}(\mathcal{P})$، فإنه يتحتم عليه أن يصدق في لحظة ما بالجملة $\mathcal{P}$، ومن ثمة بالجملة $\neg\mathcal{B}(\mathcal{P})$ (ينتج هذا عن التصديق بالجملة $\mathcal{P} \Rightarrow \neg\mathcal{B}(\mathcal{P})$ وعن قاعدة الاستنباط التوتولوجية "الصَّحْصَحَية" المسماة "القياس الاستثنائي" modus ponens). وبناء على هذا يصدق المنطقي بالجملة $\mathcal{B}(\mathcal{P}) \Rightarrow \neg\mathcal{B}(\mathcal{P})$. وبما أنه يصدق بمبدأ الإثبات بالحالات التوتولوجي، فإن ذلك يجبره على التصديق بالجملة $\neg\mathcal{B}(\mathcal{P})$، وهذا معناه أنه لن يصدق أبدا بالجملة $\mathcal{P}$. وفي هذه

الحالة لن يصدق المنطقي أبدا بالجملة $\neg\mathcal{B}(\mathcal{P}) \Rightarrow \mathcal{P}$، لأنه إذا فعل ذلك، يصير مجبرا على التصديق بـ$\mathcal{P}$، الأمر الذي يناقض موقفه الفكري السابق من هذه الجملة.

والدرس المستخلص من كل ما سبق هو أنه ينبغي على المنطقي ألا يصدق أبدا بجمل لغوية من النوع $\mathcal{P} \Leftrightarrow \neg\mathcal{B}(\mathcal{P})$.

فهل هذا كاف يا ترى لكيلا يقع مجددا في التناقض الفكري؟

## 4. سبيل النجاة: منطق قتل العدو حال العثور عليه

من بين الشروط التي وُضعت على فكر المنطقي التصديق بالجملة $\mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{D}$، بيد أنه من ناحية ثانية ليس ملزما بتصديق الجملة $\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{K}$، علما بأنها صادقة في الواقع. في هذه الحالة نقول إن فكر المنطقي ليس كاملا، أي أن المنطقي ليس قادرا على الإقرار بصدق كل ما هو صحيح في أرض الواقع. وعلى هذا الأساس نعيد التأكيد على أنه إذا كانت الجملة المصرح بها $\mathcal{D}$ هي "لا يمكنك أن تصدق أبدا بأني فارس"، فإن:

- المُصرّح فارس؛
- المنطقي لن يصدق أبدا بأن المُصرّح فارس؛
- المنطقي لن يصدق أبدا بأن المُصرّح خادم لأن ذلك غير صحيح في الواقع.
- وهكذا نلاحظ هنا بأن الجملة $\mathcal{K}$ غير قابلة للبتّ undecidable في هذه الحالة من قبل المنطقي على الرغم من صدقها في الواقع.

لنشر بالرمز "$\mathfrak{Contr}$" إلى مجموعة كل الجمل اللغوية المسببة للكوارث على صعيد فكر المنطقي مثل حال الجملة المشار إليها آنفا. والسؤال المطروح هو هل بمقدور المنطقي أن يعرف مسبقا جميع عناصر هذه المجموعة؟ إذا هو نجح في هذا المسعى، فإنه يصبح قادرا على إضافة قاعدة جديدة إلى قائمة قواعد فكره، وهي "لا ينبغي التصريح بجملة لغوية من القائمة $\mathfrak{Contr}$"، وبذلك يصير فكره مكتملا وغير متناقض. بيد أنه ولأسباب وجيهة تتجاوز مقاصد هذا النص لا يمكن للمنطقي أن يعرف جميع عناصر $\mathfrak{Contr}$ حتى ولو عدّل في قواعد فكره، وهذا يُعبرَّ عنه بالقول "إن فكر المنطقي غير قابل للاكتمال". فما هو الحل المتاح للمنطقي للتعامل مع مسألة التناقض؟

الحل العملي المتاح أمامه هو الإستراتيجية المعهودة والقديمة قدم الفكر الاستنباطي ذاته، ألا وهي "إستراتيجية قتل العدو حال العثور عليه"، أي عند اكتشاف تناقض ما في الفكر تحذف منه في الحال جميع الفرضيات الواضحة والمؤدية إلى هذا التناقض. ويتجسد هذا السلوك المنطقي في حقيقة الأمر في المبدأين التوتولوجيين الشهيرين والمصاغين بطريقة رمزية جميلة:

$$\frac{\Gamma, \neg\mathcal{P} \vdash \mathcal{Q} \wedge \neg\mathcal{Q}}{\Gamma \vdash \mathcal{P}} \ (\text{مبدأ البرهان بالتناقض}),$$

$$\frac{\Gamma, \mathcal{P} \vdash \mathcal{Q} \wedge \neg\mathcal{Q}}{\Gamma \vdash \neg\mathcal{P}} \ (\text{مبدأ إثبات النفي بالتناقض}).$$

وما يجب الإشارة إليه هنا هو أن المبادئ التوتولوجية تستخدم دائما وأبدا في جميع فروع الرياضيات بلا استثناء، بل وتستخدم كذلك في جميع النظم الفكرية الاستنباطية، وحتى في المنطق اليومي للبشر.

## 5. المبدأ النظري للذكاء الاصطناعي

يحظى الذكاء الاصطناعي في الوقت الحالي باهتمام كبير من قبل مجتمع التكنولوجيا العالمي لأنه مرجح له في سنوات قليلة قادمة أن يُحدث نقلة نوعية شاملة في حياة البشر، مؤسسا بذلك أوضاعا اقتصادية واجتماعية وسياسية وحتى أخلاقية جديدة، وملقيا بأخرى في المياه الباردة للفناء. وفي الحقيقة تُعدّ الحواسيب المستخدمة حاليا على نطاق واسع، الطلائع الأولى لأجهزة الذكاء الاصطناعي، ولقد أمكن تطويرها كما هو معروف تاريخيا انطلاقا من سخاء وكرم الدراسات الثورية في المنطق الرياضي والحوسبة الرياضية التي جرت خلال عقدي العشرينيات والثلاثينيات من القرن العشرين. ويؤكد هذا مرة أخرى الريادة الحقيقية التي تمتلكها الرياضيات في تطوير المعارف البشرية.

إن آلات الذكاء الاصطناعي المقدّر لها إنجاز علميات ذهنية وحسابية معيّنة هي تلك الآلات القابلة للبرمجة بواسطة برامج حاوية على نُظم استنباطية. وما هي النُظم الاستنباطية؟ هي نظريات فكرية تحوي ركنين اثنين:

- مجموعة مسلمات أولية تمثل المبادئ الأولى للفكر المراد إنشاؤه؛
- مجموعة قواعد للاستنباط والبرهنة الفكرية.

وفي الحقيقة يتفق خبراء الذكاء الآلي النظري على المبدأ التالي "إن النُظم الفكرية الاستنباطية (النظريات الفكرية الاستنباطية) هي التي تسيِّر ذاكرات الآلات الذكية". من هنا ندرك أهمية دراسة هذا النوع من النظم لتطوير ميدان الذكاء الاصطناعي.

### مراجع

[1] Church, A., Introduction to Mathematical Logic, Princeton University Press, 1956.
[2] Kleen, S.C., Introduction to Metamathematics, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1952.
[3] Manin, Y.I., A Course in Mathematical Logic for Mathematicians, Springer, New York, 2010.
[4] Smullyan, R.M., Theory of Formal Systems, Princeton University Press, 1961.
[5] Tourlakis, G., Lectures in Logic and Set Theory, Volume 1: Mathematical Logic, Cambridge University Press, New York, 2003.

عالم المنطق كورت غودل Kurt Gödel (1906-1978)