

النسبة الذهبية (2)

النسبة الذهبية والرياضيات

زهية مصطفىاوي¹، مريم عاشور²، كريمة قرماط²

¹أستاذة بقسم الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة، القبة

²طالبة متخرجة بقسم الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة، القبة

zahia.mostefaoui@g.ens-kouba.dz

1. نبذة تاريخية عن فيبوناتشي

وُلد الرياضياتي الإيطالي ليوناردو بيزانو، المعروف بـ فيبوناتشي Fibonacci، في سنة 1170م بمدينة بيزا الإيطالية، وتوفي بها سنة 1250م. تلقى فيبوناتشي تعليمه في مدينة بجاية الجزائرية، عندما كان أبوه جيليلمو Guilielmo يعمل في وظيفة دبلوماسية كممثل لتجار جمهورية بيزا. وقد سمحت له مهنة أبيه بالتجوال بين مدن البحر الأبيض المتوسط، تلميذا في البداية، ثم بعد ذلك في مهمات تجارية في كل من مصر، وسوريا، واليونان، وصقلية. عاد فيبوناتشي سنة 1200م إلى وطنه، وهناك ألّف كتبه الأربعة:

- Liber abaci
- Practica geometriae
- Liber quadratorum
- Flos

وهي كتب قيّمة، كان أهمها بالنسبة لموضوع هذا المقال هو كتاب ليبر أباتشي Liber abaci، حيث يتضح في هذا الكتاب تأثر فيبوناتشي بالثقافة العربية. فقد كتب الكثير من الأعداد من اليمين إلى اليسار على عادة العرب في الكتابة. يقول فيبوناتشي في هذا الكتاب إنه تعلّم ولأول مرة الأرقام العربية من خلال مدرسين متميزين يملكون معرفة كبيرة بهذا الفن، وهو الأمر الذي أسعده وجعله شغوفا بالرياضيات، ووجد فيها سعادته أكثر من أي شيء آخر.

في الفصل الأول من هذا الكتاب، قدّم فيبوناتشي الأرقام الهندية (العربية) والنظام العشري، والذي عُرف باسم algorism. ومن المؤكد أن الكثير من القضايا والمسائل التي ناقشها فيبوناتشي في هذا الفصل كانت مشابهة لتلك التي عُرضت في المصادر العربية.

يبدأ فيبوناتشي الفصل الأول من الكتاب بوصف الأرقام الهندية (العربية) التسعة: 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، بالإضافة إلى الرمز 0، الصفر، والذي سمّاه zephirum. وتظهر أهمية نظام العد العشري عند مقارنته بطريقة العد الرومانية المستخدمة في أوروبا آنذاك.

في الفصل الثاني من الكتاب، ناقش فيبوناتشي الكثير من المسائل التي كانت تهتمّ تجار بيزا، مثل أسعار البضائع، وطريقة حساب أرباح العمليات التجارية، وكيفية تحويل العملة المستخدمة في دول البحر المتوسط. وفي الفصل الثالث، قام فيبوناتشي بحل الكثير من المسائل الرياضية، إلا أن أشهرها مسألة كانت السبيل إلى اكتشاف ما أصبح يسمّى فيما بعد بمتتالية فيبوناتشي، وهي السبب في شهرة فيبوناتشي لدى الكثيرين.

2. متتالية فيبوناتشي

1.2. تجربة الأرانب

تجدر الإشارة إلى دور الإمبراطور فريدريك الثاني Frederick II، ملك صقلية، في تشجيع العلم والمعرفة. أثناء فترة حكم فريدريك الثاني عُرضت المسألة الشهيرة التي كانت السبب في اكتشاف أعداد فيبوناتشي، ومن ثم نُسبت إليه. وكان نص المسألة كالآتي:

"لو أن رجلاً قام بوضع زوجٍ من الأرانب (ذكر وأنثى) في مكان محاط بجدار من كل الجوانب، فكم زوجاً من الأرانب يمكن أن ينتج من هذين الزوجين في السنة؟ بافتراض أن كل زوج من الأرانب ينتج زوجاً آخر فقط في كل شهر، وبافتراض أن إنتاج كل زوج يبدأ من الشهر الثاني، وبافتراض أنه لن يموت أي زوج من الأرانب طوال هذه المدة".

بدأ فيبوناتشي بزواج من الأرانب الصغيرة والخيالية، أرنبين صغيرين ذكر وأنثى.



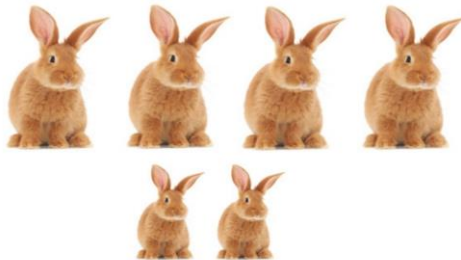
نما كلا الأرنبين بشكل كامل بعد شهر واحد.



في الشهر الثالث وُلد أرنبان صغيران، ومن جديد كانا ذكراً وأنثى.



في الشهر الرابع، نمت هذه الأرانب وبلغت، وحصل الزوج الأول على أرنبين آخرين ومن جديد ذكر وأنثى.



في الشهر الخامس، أنجب الزوجان البالغان من الأرانب زوجاً من صغار الأرانب، ونضج الزوج الثالث. أدرك فيبوناتشي أن عدد الأزواج البالغة خلال شهر ما هو إلا العدد الإجمالي للأرانب البالغة والصغيرة في الشهر السابق. وبالإشارة إلى عدد الأزواج البالغة بـ A_n في الشهر n ، وبـ F_n لعدد الأزواج الإجمالي في الشهر n ، نجد

$$A_n = F_{n-1}.$$

أدرك فيبوناتشي أيضاً أن عدد الأزواج الصغيرة في شهر ما يساوي عدد الأزواج البالغة في الشهر السابق،

وبالإشارة إلى عدد الأزواج الصغيرة خلال الشهر n بالرمز B_n ، نجد أن

$$B_n = A_{n-1} = F_{n-2}.$$

لذلك فإن عدد أزواج الأرانب الإجمالي (البالغة + الصغيرة) في شهر معين هو مجموع العدد الإجمالي لأزواج الأرانب في الشهرين السابقين

$$F_n = A_n + B_n.$$

أي

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

وعند البدء بزواج وحيد فإن المتتالية التي نحصل عليها هي

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

إذن يمكننا الآن معرفة عدد أزواج الأرانب بعد سنة أي 12 شهرا، وذلك بجمع عدد الأزواج في الشهرين 10 و 11.

$$F_{12} = F_{11} + F_{10} = 55 + 89 = 144.$$

2.2. تعريف متتالية فيبوناتشي

إن متتالية فيبوناتشي هي متتالية أعداد طبيعية، حيث كل حد من حدودها عبارة عن مجموع الحدين السابقين، تبدأ عموماً بـ 0 و 1 (لكن في بعض الأحيان يُبدأ بالعدد 1 و 1).

العلاقة التراجعية

إذا رمزنا لهذه المتتالية بـ $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ، فإنها معرفة بالعلاقة التراجعية التالية

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

مع $F_1 = 1$ و $F_0 = 0$

وهي عبارة عن متتالية تراجعية متزايدة، ومتزايدة تماماً من أجل $n \geq 2$.

تدعى السلسلة ... 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, بسلسلة فيبوناتشي أو أعداد فيبوناتشي.

يمكن للسلسلة أن تمتد لمؤشر سلمي بالصيغة التالية

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n, \quad n \geq 1.$$

فتصبح السلسلة

$$\{..., -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$$

نلاحظ من خلال الحدود الأولى أنه:

- من أجل n زوجي لدينا

$$F_{-n} = -F_n.$$

- من أجل n فردي لدينا

$$F_{-n} = F_n.$$

النهاية

إن متتالية فيبوناتشي هي متتالية متباعدة لكنها تتميز بخاصية مهمة ألا وهي: المتتالية المشكلة من نسبة حدين

متتابعين $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)$ متقاربة ونهايتها هي النسبة الذهبية، أي أن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

الصيغة العامة

الصيغة العامة لمتتالية فيبوناتشي هي

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^n - \bar{\phi}^n)$$

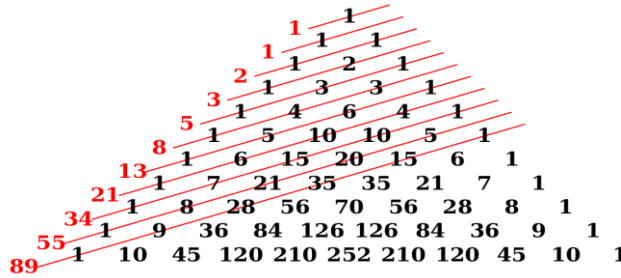
حيث

$$\bar{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

تسمى هذه الصيغة بصيغة بينيه نسبة إلى الرياضياتي الفرنسي جاك فيليب ماري بينيه Jacques Philippe Marie Binet (1856-1786) الذي اكتشفها في منتصف القرن التاسع عشر.

3.2. متتالية فيبوناتشي ومثلث باسكال

إذا دفعت الأعداد التي تظهر في مثلث باسكال نحو خط أفقي يمينا، فإن الخطوط المائلة الحمراء التي تظهر جانبا، تمر عبر أعداد معينة، تتميز بإعطاء مجموع يساوي حدود متتالية فيبوناتشي.



إذن الصيغة الجذرية التربيعية المتواصلة لـ ϕ تُكتب على الشكل التالي

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}}$$

4. النسبة الذهبية في الهندسة

1.4. المستطيل الذهبي

المستطيل الذهبي هو كل مستطيل تكون النسبة بين طوله وعرضه تساوي ϕ "النسبة الذهبية". ونكتب اختصاراً المستطيل الذهبي يحقق: الطول/ العرض = ϕ .

ومن خصائصه أنه إذا تم إزالة جزء ذي شكل مربع فإن الجزء المتبقي يكون أيضاً مستطيلاً ذهبياً. ومن أشهر المستطيلات الذهبية نجد المستطيل الكلاسيكي حيث طولاً ضلعيه 1 و ϕ . يتصف هذا المستطيل بخواص مذهشة لما له من تأثير على الحس الجمالي عند الإنسان، ويعدّ قاعدة العمارة الأولى عند القدماء، فقد وُجد في أبنية عديدة في الحضارات القديمة.

كما بيّنت الإحصائيات أن عرض مجموعة مختلفة من المستطيلات من بينها المستطيل الذهبي على أشخاص، يؤدي في غالب الأحيان إلى اختياره كأجمل المستطيلات وأكثرها تناسقاً. ولو أمعنا النظر في حياتنا اليومية، سنلاحظ أننا نختار شكلاً قريباً من المستطيل الذهبي في مختلف المواد المستعملة المستطيلة الشكل التي نتعامل معها. فكتبنا ودفاترنا وحتى قطع السكر أو الطوابع البريدية أو أوراق اللعب وبطاقات الفيزا والائتمان، كلها تتضمن نسباً قريبة من النسبة الذهبية.

أولى الفنان والعالم الإيطالي ليوناردو دافنشي Leonardo da Vinci (1452-1519) هذا المستطيل أهمية خاصة، واعتمد عليه في رسم الكثير من لوحاته. فمثلاً، لو قمنا بقياس طول وعرض لوحة الموناليزا سنحصل على النسبة الذهبية.



الشكل 1. لوحة الموناليزا

• طريقة إنشاء المستطيل الذهبي

1. نقوم بإنشاء مربع وليكن طول ضلعه 1 ونرسم مربعاً آخر بجانبه.



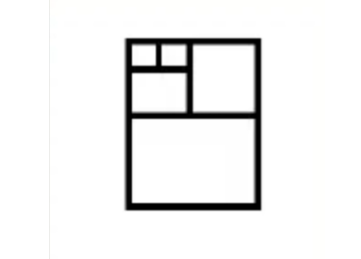
2. ثم نقوم بإنشاء مربع طول ضلعه 2.



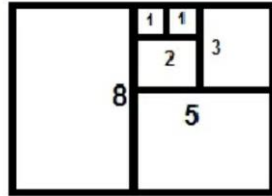
3. ونقوم بعدها بإنشاء مربع على جانبه، طول ضلعه 3.



4. نعود لنقوم بإنشاء مربع آخر، فيكون طول ضلعه 5.



5. ونكرر العملية على الجانب.



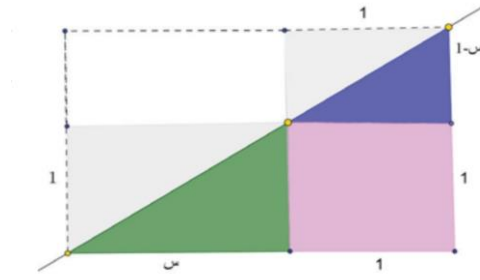
ناتج قسمة طول المستطيل، وهو 13، على عرضه، وهو 8، يساوي ϕ تقريبا، وكلما كررنا العملية اقتربت نسبة طول المستطيل الناتج على عرضه إلى النسبة الذهبية. كما نلاحظ أن المربعات التي يتألف منها هذا المستطيل الذهبي تحمل قياسات متطابقة مع حدود متتالية فيبوناتشي.

يمكن التأكد من ذهبية مستطيل ما بوضعه أفقيا ثم عموديا كما هو موضح في الشكل 2. فإذا مرّ قطر الأول برأس المستطيل الآخر فهو إذن مستطيل ذهبي.

إذا كان بعدا المستطيل المراد التأكد من ذهبيته 1 و x ، فإن نصف المساحة الكلية للمستطيل الكبير (انظر الشكل 2) هي $\frac{x(x+1)}{2}$. وهي تساوي مجموع مساحة المثلث الكبير $\frac{x}{2}$ (الأخضر) ومساحة المربع 1 (الزهري) ومساحة المثلث الصغير $\frac{x-1}{2}$ (الأزرق). وبالتالي نحصل على

$$\frac{x(x+1)}{2} = \frac{x}{2} + 1 + \frac{x-1}{2}.$$

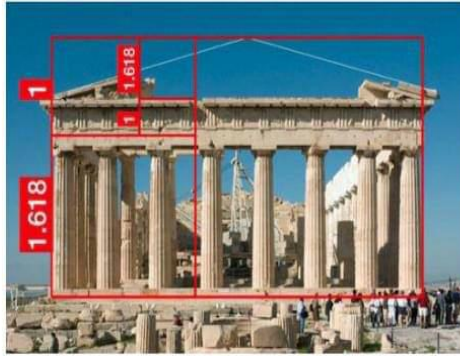
أي أن x يحقق المعادلة $x^2 - x - 1 = 0$ مما يعني أن $x = \phi$.



الشكل 2. طريقة التأكد من ذهبية المستطيل

• فيثاغورس والمستطيل الذهبي

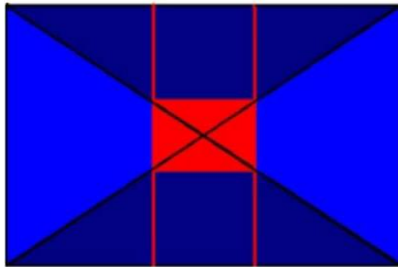
يُعتقد أن فيثاغورس (Pythagoras 490-570 ق.م.) أجرى العديد من الدراسات والأبحاث في علوم الطبيعة لدراسة معايير الجمال وعلاقات النسب في الطبيعة، وتوصل إلى ما يُعرف بالمستطيل الذهبي. ويبدو أن اليونانيين انتبهوا إلى أن هذا المستطيل مريح بصريا، ويشكل أحد أهم معايير الجمال في الطبيعة. لذا فقد اعتمدوا هذا المستطيل الذهبي في عمارتهم مثل مبنى البارثينون الشهير.



الشكل 3. مبنى البارثينون

• المستطيل الذهبي وفن التصوير

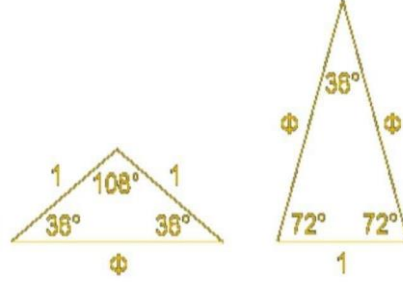
عندما ننظر إلى صورة فوتوغرافية مستطيلة الشكل فإن نظرك يتجه ألياً نحو حيز في الوسط يشكل منطقة قوة الصورة (الحيز الأحمر). حيث يمكن رسم مستطيلين ذهبيين طول كل واحد منهما يساوي عرض الصورة، تحدد نقطة تقاطع قطري الصورة مع المستقيمين الأحمرين (الذين يحددان بدورهما عرض المستطيلين الذهبيين) حيز منطقة قوة الصورة. والشكل التالي يوضح ذلك.



الشكل 4. المستطيل الذهبي وفن التصوير

2.4. المثلث الذهبي

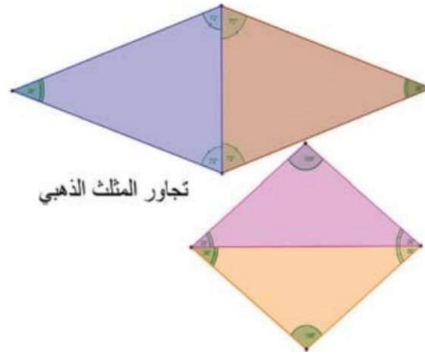
المثلث الذهبي هو إما مثلث متساوي الساقين يكون فيه قياس زاوية الرأس يساوي 36° . فقيسا زاويتي القاعدة يساويان 72° ، ونسبة طول الضلع الطويل إلى الضلع الصغير (القاعدة) يساوي النسبة الذهبية ϕ ، أو مثلث متساوي الساقين يكون فيه قياس زاوية الرأس يساوي 108° ، وبالتالي قياسا زاويتي القاعدة يساويان 36° ، وتبقى النسبة بين الضلع الكبير والصغير ثابتة وتساوي ϕ ، كما هو مبين في الشكل 5.



الشكل 5. المثلث الذهبي

• المثلث الذهبي والمعين الذهبي

بمجاورة مثلثين ذهبيين نحصل على شكل المعين، أي عندما نلصق قاعدتي مثلثين ذهبيين فإنه يظهر ما يسمى بالمعين الذهبي، والذي كثيرا ما يستخدم في الزخرفة الإسلامية، وتكون فيه نسبة طول أي ضلع إلى طول خط التناظر تساوي النسبة الذهبية



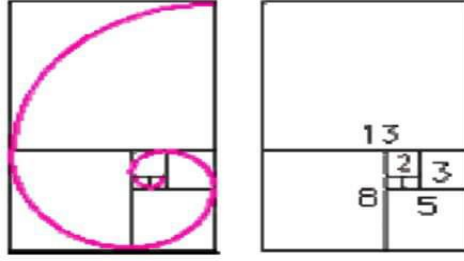
الشكل 6. المعين الذهبي

3.4. اللولب الذهبي

يمكن تشكيل اللولب الذهبي أو لولب فاي، من خلال رسم ربع دائرة داخل كل مربع من المربعات التي يتألف منها المستطيل الذهبي، كما هو موضح في الشكل 7. وبطريقة حسابية يمكننا الحصول على لولب فيبوناتشي من خلال حساب مجموع مربعات حدود متتالية فيبوناتشي، نجدها مساوية لآخر حد مضروب في الحد الذي يليه. نتائج هذه الخاصية هي ما يعرف بدوامة فيبوناتشي.

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + F_n^2 = F_n \times F_{n+1}$$

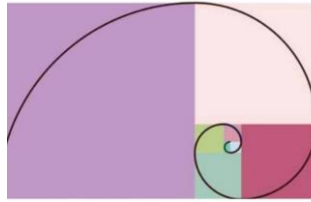
$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 = 8 \times 13.$$



الشكل 7. اللولب الذهبي

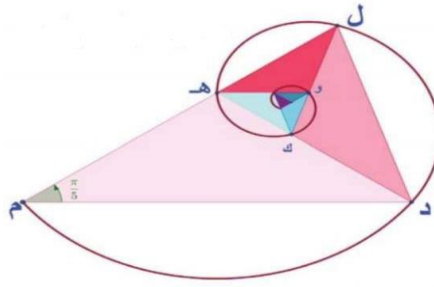
• طريقة الحصول على لولب ذهبي

1. الحصول على اللولب الذهبي بالاعتماد على المستطيل الذهبي، كما هو موضح في الشكل الموالي.



الشكل 8. الحصول على اللولب الذهبي بالاعتماد على المستطيل الذهبي

2. الحصول على اللولب الذهبي بالاعتماد على المثلث الذهبي، كما هو موضح في الشكل الموالي.



الشكل 9. الحصول على اللولب الذهبي بالاعتماد على المثلث الذهبي

الشيء الذي يحدد اللولب الذهبي بغض النظر عن اللولب الأخرى هو كون منحاه يبقى هو ذاته بالضبط، مهما صغرنا أو كبرنا شكل قوس اللولب على المثلث أو على المستطيل، فإننا نحصل دائما على نسخة طبق الأصل على كل مستطيل ذهبي أو مثلث ذهبي. بمعنى آخر سنرى صورة مكبرة أو مصغرة فقط لكل ما نراه.

• اللولب الذهبي وفن التصوير

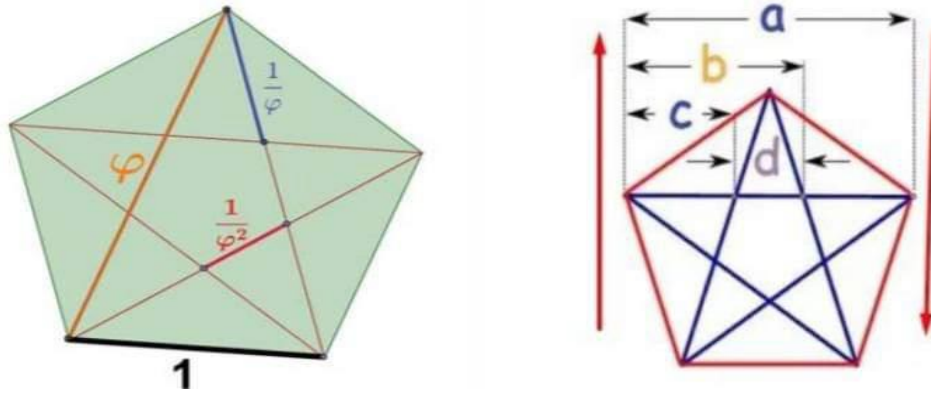
إن تحقيق الاتزان بالنسب الذهبية بواسطة الشكل المنحني الحلزوني يتطلب مهارة وتدريباً من المصور، ويمكنه الاستعانة بالخطوط الطولية والعرضية بشاشة محدد الرؤية. وإليك نماذج من بعض الصور الإعلامية التي يتحقق فيها اللولب الذهبي.



الشكل 10. اللولب الذهبي وفن التصوير

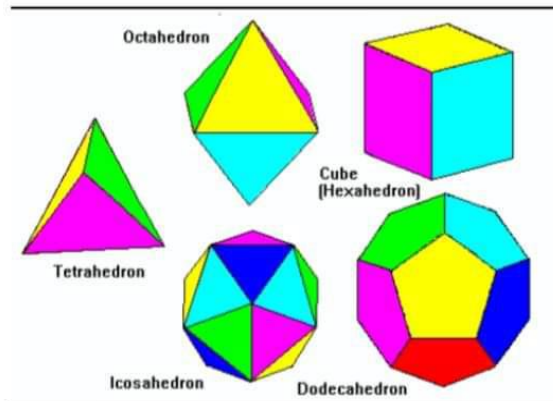
3.4. النجمة الخماسية وخماسي الأضلاع

في الشكل 11، نلاحظ أن نسبة أن نسبة طول الضلع c إلى الضلع b هي نفسها نسبة طول الضلع b إلى الضلع a ، وهي تساوي النسبة الذهبية. بإيصال الرؤوس الخمسة للنجمة الخماسية يتكون لدينا الخماسي الذهبي الذي يحقق النسبة ϕ . الخماسي الذهبي هو مضلع خماسي محتوي في دائرة وأضلاعه وزواياه كلها متقايسة.



الشكل 11. النجمة الخماسية وخماسي الأضلاع

وتجدر الإشارة إلى أن خماسي الأضلاع هو اسم مقر وزارة الدفاع الأمريكية البنتاغون، في حين أن العديد من الدول من الغرب إلى الشرق مروراً بالعالم الإسلامي اتخذت من النجمة الخماسية شعاراً لها يزين أعلامها. وكما أن النسبة الذهبية الموجودة في الأشكال الهندسية المستوية، فهي تتواجد كذلك في الأشكال ثلاثية البعد، وأهمها رباعي الوجوه المنتظم والمكعب وثمانى الوجوه، أو ما يُعرف بالمجسمات الأفلاطونية.

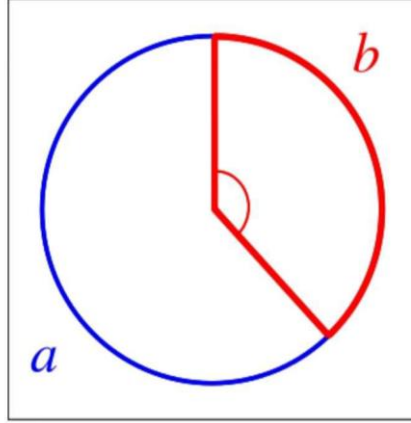


الشكل 12. المجسمات الأفلاطونية

5.4. الزاوية الذهبية

في الهندسة، تُعرّف الزاوية الذهبية على أنها الزاوية المركزية التي تنتج عندما نقسم محيط الدائرة إلى قطاع a وقطاع b بحيث يتحقق

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{b} \quad , \quad c = a + b.$$



الشكل 13. الزاوية الذهبية

تسمى الزاوية المنشأة عن طريق القوس b الزاوية الذهبية، وقياسها تقريبا 137.51° أي ما يعادل بالتقريب 2.4 راديان، والقياس الدقيق هو:

- $\frac{2\pi}{\phi}$ للزاوية الداخلية؛
- $\frac{2\pi}{\phi+1}$ للزاوية الخارجية.

من المعلوم أن أبجدية العلوم تأسست على الرياضيات، ولكن سحر النسبة الذهبية لا يقتصر على الرياضيات فقط، بل هي معيار جمالي لمختلف المجالات سواء معمار، فن، موسيقى، تخطيط، إلخ.

