حول الاشتقاق كسري الرتبة

عبد الرشيد سعدي
أستاذ بقسم الرياضيات، جامعة محمد بوضياف، المسيلة
abderrachid.saadi@univ-msila.dz

1. مقدمة تاريخية

يُذكر أنه في سنة 1695 كتب ليبنيتز Leibniz إلى لوبيتال L'Hôpital، في إحدى رسائله ما يلي: "هل يمكننا تعميم المشتقات ذات الرتب الصحيحة إلى مشتقات ذات رتب غير صحيحة؟"، أجاب لوبيتال: "هل يمكن التعميم إلى الرتبة ½ مثلا؟" فرد ليبنيتز: "إن ذلك سيؤدي إلى مفارقة، وقد تكون نتائجه مفيدة يوما ما".

بعد نحو ثلاثين سنة أعاد أويلر Euler صياغة السؤال بالطريقة التالية: "إذا كان n عددا صحيحا موجبا وكانت p دالة ذات متغير x فإن النسبة $\frac{d^n p}{dx^n}$ يمكن التعبير عنها جبريا، ولكن ماذا لو كان n كسريا؟" ليقوم لاكروا Lacroix سنة 1819 في كتابه "رسالة في حساب التفاضل والتكامل" بتقديم المشتق من الرتبة $\frac{1}{2}$ في حالة خاصة بالعبارة التالية

$$\frac{d^{1/2}x}{dx^{1/2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}.$$

وفي سنة 1822 اقترح فوريه Fourier تعميم النتيجة التالية

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} y^n dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)cos(xy - yz + n\frac{\pi}{2})\, dz$$

المتعلقة بالأعداد الطبيعية n، وذلك من أجل تعريف المشتق من رتبة غير طبيعية ومن أجل دوال تحقق خصائص معينة مرتبطة بالتكامل أعلاه.

كما قام آبل Abel سنتي 1821 و1826 بحل المعادلة التالية

$$\int_a^x \frac{y(t)}{(x-t)^\alpha} dt = f(x) \qquad x > a, \quad 0 < \alpha < 1.$$

إنها تعميم لمسألة الزمن المتساوي (tautochrone problem). لقد ساهمت هذه المسألة إلى حد كبير في ظهور مفهوم المشتق غير الطبيعي على الرغم من أن آبل لم يكن يقصد ذلك في الأصل.

وما بين العامين 1832 و 1837 قام ليوفيل Liouville بنشر مجموعة من المقالات متعلقة بالمعادلات التفاضلية التكاملية من النمط كسري الرتبة، حيث قدم في أحد مقالاته تعريفا للتكامل من رتبة عدد مركب α جزؤه الحقيقي موجب تماما

$$I^\alpha f(x) = D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{(-1)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} f(x+t) t^{\alpha-1} dt \qquad x \in IR.$$

وهو التعريف الذي عُرف باسمه مع ملاحظة أنه تم الاستغناء عن الحد $(-1)^\alpha$ وأن $\Gamma(\alpha)$ هي دالة أويلر المعرفة بـ

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

إن هذه النتيجة على قدر كبير من الأهمية، وقد اشتغل عليها ريمان Riemann سنة 1847 أيام كان طالبا، ليتم نشر بحثه سنة 1876 مقدما التعريف الحالي للتكامل الكسري والمعروف باسم ريمان – ليوفيل

$$I^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}dt \qquad x > 0.$$

كانت هذه مقدمة لمفهوم المشتق كسري الرتبة من نمط ريمان – ليوفيل، ليأتي بعدها هادامارد Hadamard سنة 1892 في مقاله "دراسة الدوال المقدمة عن طريق نشر تايلور" مقدما تعريفا آخر يستعمل فيه الدالة اللوغاريتمية وتكامل ستيلجس Stieltjes المتعلق بها

$$I^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x f(t)(\ln x - ln\, t)^{\alpha-1}dlnt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x f(t)(\ln x - ln\, t)^{\alpha-1}\frac{dt}{t} \qquad x > 0.$$

كما أن التكامل المعروف باسم ريمان – ليوفيل كان مقدمة للاشتقاق الكسري الذي عرف باسم كابوتو Caputo والذي ظهر سنة 1967.

قام ليوفيل أيضا بمحاولة لتعريف الاشتقاق الكسري عن طريق نسبة التزايد ولكنه لم يتقدم فيها بشكل ملحوظ، ومع ذلك فقد تلقف هذه الفكرة منه غرينولد Grünwald سنة 1867 وليتنيكوف Letnikov سنة 1868، ووضعا التعريف الذي يحمل اسمهما والمعطى بالعبارة التالية

$$D^{\alpha}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}f(x-kh), \quad \alpha \in IR\backslash IN.$$

وجدير بالذكر أن هناك تعاريف ومحاولات أخرى، منها ما تجاوزه الزمن وأصبح ضمن التراث الرياضياتي، ومنها ما تم تطويره واستغلاله، خصوصا في السنوات الأخيرة التي يُلاحظ فيها كمٌ هائل من البحوث في هذا الميدان الواسع. بل إن بعض المجلات قد تخصصت في الحساب كسري الرتبة وصار لها تصنيف مميز ضمن المجلات التي تنشر بحوثا أصلية في الرياضيات وتطبيقاتها.

إن الإلمام بمختلف تعاريف الحساب التفاضلي كسري الرتبة لا تحتمله هذه العجالة، لذا فإننا سنقتصر على تقديم مجموعة من المقاربات الشهيرة:

2. مقاربات شاملة (غير محلية) لتعريف المشتق كسري الرتبة

تعتمد هذه المقاربات على اعتبار أنه يمكن تعريف الدالة عن طريقة اشتقاقات متتابعة لتكاملات متتالية لهذه الدالة. ومن ضمن هذه المقاربات نجد:

1.2 مقاربة ريمان - ليوفيل

لتكن f دالة مستمرة على مجال (a,b) حيث a وb عددان حقيقيان مكتملان.

يمكننا أن نحصل على الدالة f ذاتها من العبارة

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = -\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)dt.$$

كما يمكننا الحصول عليها باستعمال المشتق النوني للعبارة التالية

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)dt = \frac{d^n}{dx^n}\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_x^b (t-x)^{n-1}f(t)dt.$$

فباعتبار عدد حقيقي موجب تماما α جزؤه الصحيح (n-1) وباستعمال العلاقة الشهيرة !Γ (n)=(n-1) يمكننا أن نُعرف تكامل ريمان – ليوفيل من اليسار بالعبارة

$${}^{RL}I_{a+}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt.$$

كما يمكننا تعريف تكامل ريمان – ليوفيل من اليمين بالعبارة

$$ {}^{RL}I_{b-}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{b}(t-x)^{\alpha-1}f(t)dt. $$

إن هذا التكامل معرف جيدا من أجل كل التوابع القابلة للمكاملة على المجال [a,b] وهو قابل للمكاملة على المجال [a,b]، كما يمكن تعميم هذا التعريف إلى كل الأعداد المركبة α ذات الجزء الحقيقي الموجب تماما والذي جزؤه الصحيح يساوي (n-1).

يُعرف المشتق من اليسار من نمط ريمان – ليوفيل بالعبارة التالية

$$ {}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \quad {}^{RL}I_{a+}^{n-\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt. $$

كما يُعرف المشتق من اليمين من نمط ريمان – ليوفيل بالعبارة التالية

$$ {}^{RL}D_{b-}^{\alpha}f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \quad {}^{RL}I_{b-}^{n-\alpha}f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_{x}^{b}(t-x)^{n-\alpha-1}f(t)dt. $$

يمكننا رصد بعض الخواص للتكامل والاشتقاق من نمط ريمان – ليوفيل مماثلة لخواص التكامل والاشتقاق العادي. فمن أجل عددين مركبين α و β ذوي جزأين حقيقيين موجبين تماما ومن أجل دوال f تحقق خواص معينة لدينا:

$$ {}^{RL}I_{a+}^{\alpha}\ {}^{RL}I_{a+}^{\beta}f = {}^{RL}I_{a+}^{\beta}\ {}^{RL}I_{a+}^{\alpha}f = {}^{RL}I_{a+}^{\alpha+\beta}f $$
$$ {}^{RL}I_{b-}^{\alpha}\ {}^{RL}I_{b-}^{\beta}f = {}^{RL}I_{b-}^{\beta}\ {}^{RL}I_{b-}^{\alpha}f = {}^{RL}I_{b-}^{\alpha+\beta}f $$
$$ {}^{RL}D_{a+}^{\alpha}\ {}^{RL}D_{a+}^{\beta}f = {}^{RL}D_{a+}^{\beta}\ {}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f = {}^{RL}D_{a+}^{\alpha+\beta}f $$
$$ {}^{RL}D_{b-}^{\alpha}\ {}^{RL}D_{b-}^{\beta}f = {}^{RL}D_{b-}^{\beta}\ {}^{RL}D_{b-}^{\alpha}f = {}^{RL}D_{b-}^{\alpha+\beta}f $$
$$ {}^{RL}D_{a+}^{\alpha}\ {}^{RL}I_{a+}^{\beta}f = {}^{RL}D_{b-}^{\beta}\ {}^{RL}I_{b-}^{\alpha}f = f $$

كما أن الاشتقاق كسري الرتبة يتطابق مع الاشتقاق العدي في حالة كون رتبة الاشتقاق عددا طبيعيا.

هناك اختلاف واضح بين الاشتقاق كسري الرتبة من نمط ريمان –ليوفيل وبين الاشتقاق العادي، وهو أن المشتق الكسري للدالة الثابتة ليس بالضرورة معدوما. فمن أجل عدد مركب غير طبيعي α ذي جزء حقيقي موجب تماما وجزؤه الصحيح (n-1)، ومن أجل الدالة الثابتة التي تأخذ القيمة غير المعدومة C، لدينا

$$ {}^{RL}D_{a+}^{\alpha}C = \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}dt = \frac{C(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \neq 0. $$

هناك أيضا اختلاف متعلق بقاعدة ليبنيتز الشهيرة الخاصة بالمشتق النوني لجداء دالتين، فبينما هي في الحالة العادية تعطى بدستور بسيط، نجدها هنا تعطى وفق دساتير معقدة وتحت شروط معينة.

2.2. مقاربة كابوتو

تعتمد هذه المقاربة على اعتبار أنه يمكن تعريف الدالة عن طريقة تكاملات متتابعة لاشتقاقات متتالية لهذه الدالة، إذ أنه من أجل دالة f قابلة للاشتقاق باستمرار n مرة على مجال [a,b] يمكننا أن نحصل على

$$ f(x) = f(a) + \int_{a}^{x}f'(t)dt = f(b) - \int_{x}^{b}f'(t)dt. $$

كما يمكننا استعمال المشتق النوني للحصول على

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)dt$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(b)}{k!}(b-x)^k+\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_x^b(t-x)^{n-1}f^{(n)}(t)dt.$$

إن هذا يقودنا بالطريقة ذاتها إلى تعريف المشتق كسري الرتبة من نمط كابوتو اعتمادا على التكامل الكسري من نمط ريمان – ليوفيل، وذلك بعكس موقع الاشتقاق. فبدلا من الاشتقاق خارج التكامل نستعمل تكامل ريمان – ليوفيل على المشتق النوني. وهكذا نُعرف المشتق من اليسار من نمط كابوتو بالعبارة التالية

$${}^{C}D_{a+}^{\alpha}f(x)=\quad {}^{RL}I_{a+}^{n-\alpha}f^{(n)}(x)=\frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_a^x(x-t)^{n-\alpha-1}f^{(n)}dt.$$

كما نُعرف المشتق من اليمين من نمط كابوتو بالعبارة التالية

$${}^{C}D_{b-}^{\alpha}f(x)=\quad {}^{RL}I_{b-}^{n-\alpha}f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\frac{d^n}{dx^n}\int_x^b(t-x)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)dt.$$

إن ارتباط مفهوم المشتق من نمط ريمان – ليوفيل ومن نمط كابوتو يمكن استنتاجه من التعريف ومن خواص التكامل، إذ أنه لدينا:

$${}^{C}D_{a+}^{\alpha}f(x)=\quad {}^{RL}D_{a+}^{\alpha}\left(f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)$$
$${}^{C}D_{b-}^{\alpha}f(x)=\quad {}^{RL}D_{b-}^{\alpha}\left(f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(b)}{k!}(b-x)^k\right)$$

ومثل الاشتقاق من نمط ريمان – ليوفيل فإن الاشتقاق من نمط كابوتو يتمتع أيضا بخواص مماثلة لخواص التكامل والاشتقاق العادي. فمن أجل عددين مركبين α و β ذوي جزأين حقيقيين موجبين تماما ومن أجل دوال f تحقق خواص معينة لدينا:

$${}^{C}D_{a+}^{\alpha}\ {}^{C}D_{a+}^{\beta}f=\quad {}^{C}D_{a+}^{\beta}\ {}^{C}D_{a+}^{\alpha}f=\quad {}^{C}D_{a+}^{\alpha+\beta}f$$
$${}^{C}D_{b-}^{\alpha}\ {}^{C}D_{b-}^{\beta}f=\quad {}^{C}D_{b-}^{\beta}\ {}^{C}D_{b-}^{\alpha}f=\quad {}^{C}D_{b-}^{\alpha+\beta}f$$

كما تجدر الإشارة إلى أن المشتق من نمط كابوتو للدالة الثابتة يساوي 0 مهما كانت رتبة الاشتقاق.

3.2. مقاربة هادامارد وكاتيغامبولا Katugampola

يمكن توسيع مفهوم الاشتقاق كسري الرتبة من نمط ريمان – ليوفيل وذلك بالاعتماد على تكامل لوبيغ – ستيلجس بدلا من تكامل لوبيغ. فإذا اعتبرنا دالة مرجعية لتكامل ستيلجاس ψ فإنه يمكننا تعريف التكامل كسري الرتبة ذي الدالة المرجعية ψ كما يلي:

$${}^{\psi}I_{a+}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}f(t)d\psi(t)$$
$${}^{\psi}I_{b-}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_x^b\left(\psi(x)-\psi(t)\right)^{\alpha-1}f(t)d\psi(t).$$

وهكذا إذا كانت الدالة ψ قابلة للاشتقاق فإنه يمكننا كتابة التكامل كما يلي:

$$ {}_{\psi}I_{a+}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x}(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}f(t)\psi'(t)dt $$

$$ {}_{\psi}I_{b-}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{x}^{b}\left(\psi(t)-\psi(x)\right)^{\alpha-1}f(t)\psi^{'}(t)dt. $$

وعليه، يمكننا تعريف المشتقات كسرية الرتبة بالنسبة للدالة ψ كما يلي:

$$ {}_{\psi}D_{a+}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{(n)}\int_{a}^{x}(\psi(x)-\psi(t))^{n-\alpha-1}f(t)\psi'(t)dt $$

$$ {}_{\psi}D_{b-}^{\alpha}f(x)=\frac{(-1)^{n}}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\left(\frac{1}{\psi^{'}(x)}\frac{d}{dx}\right)^{(n)}\int_{x}^{b}\left(\psi(t)-\psi(x)\right)^{n-\alpha-1}f(t)\psi^{'}(t)dt. $$

كما يمكننا تعريف المشتقات كسرية الرتبة (من نمط كابوتو) بالنسبة للدالة ψ كما يلي:

$$ {}_{\psi,C}D_{a+}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{x}(\psi(x)-\psi(t))^{n-\alpha-1}\left[\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{(n)}f(t)\right]\psi'(t)dt $$

$$ {}_{\psi,\mathrm{C}}D_{b-}^{\alpha}f(x)=\frac{(-1)^{n}}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_{x}^{b}\left(\psi(t)-\psi(x)\right)^{n-\alpha-1}\left[\left(\frac{1}{\psi^{'}(x)}\frac{d}{dx}\right)^{(n)}f(t)\right]\psi^{'}(t)dt. $$

يمكن أن ينجم عن هذه المقاربة عدة مقاربات باعتبار الدالة المرجعية ψ، أشهرها:

- **مقاربة هادامارد**: وذلك بوضع $\psi=\frac{1}{x}$، وقد تقدم أن أول من تكلم عنها هو هادامارد سنة 1892.
- **مقاربة كاتيغامبولا**: تم نشرها في مقال محكم سنة 2014. تعتمد هذه المقاربة على الدالة المرجعية

$$ \psi=x^{\rho}\ (\rho>0). $$

من الجدير بالذكر أن الخواص السابقة للاشتقاق والتكامل تبقى صالحة لهذه المقاربات.

4.2. مقاربة إرديلي – كوبر (Erdelyi-Kober)

في بداية الأربعينيات من القرن الماضي قدم الرياضياتيان إرديلي وكوبر أبحاثا تتعلق بالحساب التفاضلي والتكاملي كسري الرتبة وعلاقته بتحويلي فورييه وميلين Mellin. تتلخص مقاربة إرديلي –كوبر في اعتماد التكامل كسري الرتبة من اليسار واليمين من أجل العدد الحقيقي الموجب تماما σ والعدد المركب ρ:

$$ I_{a+}^{\alpha,\sigma,\rho}f(x)=\frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\rho)}}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x}(x^{\sigma}-t^{\sigma})^{\alpha-1}t^{\sigma(\rho+1)-1}f(t)dt $$

$$ I_{b-}^{\alpha,\sigma,\rho}f(x)=\frac{\sigma x^{\sigma\rho}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{x}^{b}(t^{\sigma}-x^{\sigma})^{\alpha-1}t^{\sigma(1-\alpha-\rho)-1}f(t)dt, $$

والمرفقة بالاشتقاقات كسرية الرتبة من اليسار ومن اليمين:

$$ D_{a+}^{\alpha,\sigma,\rho}f(x)=x^{-\sigma\rho}\left(\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}}\frac{d}{dx}\right)^{n}\left[x^{\sigma(n+\rho)}I_{a+}^{n-\alpha,\sigma,\rho+\alpha}f(x)\right] $$

$$ D_{b-}^{\alpha,\sigma,\rho}f(x)=x^{\sigma(\rho+\alpha)}\left(-\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}}\frac{d}{dx}\right)^{n}\left[x^{\sigma(n-\rho-\alpha)}I_{a+}^{n-\alpha,\sigma,\rho+\alpha-n}f(x)\right]. $$

يمكن رصد خواص مشابهة للخواص السابقة، ولكن بينها اختلافات راجعة للدالة المستعملة في مقاربة إرديلي – كوبر، والتي تختلف عن الدوال المستعملة في المقاربات السابقة.

3. مقاربات محلية لتعريف المشتق كسري الرتبة

بينما تعتمد المقاربات السابقة على النظر إلى المشتق نظرة شاملة (عن طريق استعمال التكامل) فإن هذه المقاربة تنظر إلى المشتق نظرة محلية باستعمال مفهوم النهاية.

1.3. مقاربة غرينولد–ليتنيكوف

لقد أشرنا إليها سابقا باختصار، ويمكننا الآن أن نفصل فيها قليلا. فمن أجل دالة f قابلة للاشتقاق n مرة يمكننا أن نكتب

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} f(x-kh).$$

وهو ما يمكن ترجمته باستعمال الدالة غاما إلى العبارة التالية

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} f(x-kh), \quad \alpha \in IR\backslash IN.$$

إن الحد $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ يُعبَّر عنه بالرمز $\binom{k}{n}$ أو C_n^k، والذي يمكن تعميمه إلى الأعداد المركبة غير الطبيعية كما يلي

$$\binom{k}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}.$$

وهو عدد لا ينعدم حتى ولو جعلنا k يؤول إلى اللانهاية. هذا ما يقودنا إلى اعتبار تعريف محلي للمشتق كسري الرتبة

$${}^{GL}D^{\alpha} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{k}{\alpha} f(x-kh), \quad \alpha \in IR\backslash IN.$$

2.3. المشتقات الكسرية المحافظة

في أبحاث حديثة، ظهرت مقاربة جديدة تعتمد على التعريف الشهير للعدد المشتق على أنه نهاية نسبة التزايد أي

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

يتلخص هذا الأمر في استبدال نسبة التزايد السابقة بنسبة تزايد مكيفة مع رتبة الاشتقاق α

$$D^{\alpha} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+hx^{1-\alpha})-f(x)}{h}, \qquad \alpha \in]0,1].$$

إن هذا التعريف للمشتق كسري الرتبة يحافظ (كما هو ظاهر من تسميته) على معظم خواص الاشتقاق العادي (العمليات على الاشتقاق، دستور ليبنيتز، إلخ). كما يمكن تعميمه إلى عدد حقيقي كيفي $\alpha \in]n-1,n]$ بالشكل التالي

$$D^{\alpha} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+hx^{n-\alpha}) - f^{(n-1)}(x)}{h}.$$

ولكن على ما يبدو، فإن النتائج الخاصة بهذا النمط من الاشتقاق هي تعميم بسيط للنتائج الخاصة بالاشتقاق العادي.

4. بعض تطبيقات الاشتقاق كسري الرتبة

لقد انتشرت الأبحاث في هذا المجال انتشارا رهيبا، بحيث لا يستطيع الباحث أن يقف على ذلك مهما كانت قدرته على الاستيعاب ومهما كانت مواكبته للبحوث. حيث إنه تم الخوض في العديد من المعادلات التفاضلية والتفاضلية الجزئية بعد تحوير حدودها أو البعض من حدودها إلى النمط كسري الرتبة، وللباحث أن يتخيل مدى ضخامة هذه الأعمال (رغم أنها حديثة لا يتجاوز عمرها ربع قرن). ولهذا هناك تطبيقات كثيرة للاشتقاق كسري الرتبة باعتماد نمذجات سابقة وتحويرها.

إن هذا العمل قد لا يروق لجماعة من الباحثين كونه ينطلق من معادلات افتراضية لا يمكن ضمان تطبيقها في العلوم الفيزيائية والحيوية وغيرها، ولكن هذا لا يمنع من القول إنها بحوث أصيلة ظهرت فيها نتائج صحيحة تعتمد على الأعمال التراكمية للباحثين السابقين، وهل البحث في الرياضيات البحتة والتطبيقية إلا هذا؟

ومع ذلك، فهناك أبحاث تطبيقية تعتمد على المعادلات التفاضلية كسرية الرتبة تخص مجموعة من الميادين منها: الإلكترونيك، الهيدروديناميك، ميكانيكا الموائع، الأنظمة الحركية، الجيوفيزياء، علم التربة، البيوكيمياء، الاقتصاد والمالية، إلخ.

5. وماذا بعد؟

إن الناظر للأبحاث المنشورة في مجال الحساب التفاضلي والتكاملي كسري الرتبة لا بد له من الاعتراف أنه أمام فرع جديد ضخم، بُنيت أسسه على أعتاب الحساب التفاضلي والتكاملي التقليدي. ولقد انتظر العالم مدة طويلة بقيت فيها الأبحاث الأولى طي الكتب والدوريات، حتى كانت الانطلاقة الكبرى في أواخر القرن الماضي والسنوات الأخيرة.

ولعل أهم مرجع أساسي في هذا المجال للمبتدئ هو الكتابان اللذان ألفهما كيلباس Kilbas مع زملاء له:

- الكتاب الأول مع سامكو Samko وماريتشيف Marichev والذي صدر سنة 1993. وهو كتاب ضخم يتضمن الإطار النظري للحساب التفاضلي والتكاملي كسري الرتبة.
- الكتاب الثاني مع سريفاستافا Srivastava وتريجيلو Trujillo الذي صدر سنة 2006، والذي تضمن بالإضافة إلى تتمات وأسس في الحساب التفاضلي والتكاملي كسري الرتبة، تطبيقات في المعادلات التفاضلية الكسرية (الوجود والوحدانية وحساب الحل).

لقد تم تطوير الإصدارات المختلفة لنظرية النقطة الصامدة لتتناسب مع المعادلات والجمل التفاضلية والتفاضلية الجزئية كسرية الرتبة ومن مختلف المقاربات. كما كان للطرق العددية الحظ الأوفر من أبحاث تتعلق بالحلول التقريبية للمعادلات التفاضلية والتكاملية والتفاضلية – التكاملية ذات الرتب الكسرية.

ظهرت توجهات حديثة لدراسة الحلول الضعيفة لمسائل القيم الحدية الكسرية، مع ما يقتضيه من تعريف لفضاءات سوبولاف Sobolev متوافق مع مختلف الاشتقاقات الكسرية. يقودنا هذا إلى التساؤل عن إمكانية تعريف مفهوم المشتق الكسري وفق نظرية التوزيعات. يحتاج الأمر بذلا لمزيد من الجهد، كما يحتاج إلى عمل جماعي ومؤسساتي.

إن واقع البحث العلمي يقودنا إلى الاعتقاد بأن مجال النشر في ميدان الاشتقاق كسري الرتبة لا يزال طويلا وله مستقبل واعد، لاسيما في مجال التحليل العددي.

كانت هذه جولة قصيرة عبر الزمان، وعبر مختلف المقاربات، وذلك للتعريف بجزء بسيط من هذا الميدان الواسع.

مراجع

[1] Hadamard J., Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, Journal de mathématiques pures et appliquées, 4e série, tome 8, p.101-186, 1892.
[2] Kilbas A. A., Marichev O. I., Samko S. G., Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
[3] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J., Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, 2006.
[4] Lacroix S. F., Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, 2ème édition, Paris, 1819.
[5] Lazarevic M. P., Rapaic M. R., Šekara T. B., Introduction to Fractional Calculus with Brief Historical Background, in book: Advanced Topics on Applications of Fractional Calculus on Control Problems, System Stability and Modeling, WSEAS Press, 2014.