التعاكس المخروطيّ

حمزة خليف
أستاذ الرياضيات، متقاعد
hkhelif@gmail.com

مقدّمة

التعاكس الدائريّ قديم نسبيًا، بالرغم من أنه لم يعُد يظهر في البرامج التعليمية منذ عدة عقود. هذا التحويل مجهول من جانب الكثير من ممارسي الرياضيات، مع أنه مصدر ثريّ للعديد من الجماليات الرياضياتية. نجد تطبيقاته المختلفة في ميادينَ شتّى كالهندسة والميكانيكا وعلم الخرائط، على سبيل المثال لا الحصر. من خصائصه الجوهرية تحويلُ حركة دائرية إلى حركة مستقيمة (المرجع 4، الصفحة 692) [1]. من ناحية أخرى، يُعدّ التعاكس بالنسبة إلى مخروطيّ غيرِ الدائرة، جديدًا تمامًا، أمّا التعاكس بالنسبة إلى منحن جبريّ أيّا كان فلم يُعَرّف، على حدّ علمي، إلا منذ عهد قريب جدا [2].

نشير إلى أنّ محتوى هذا النص والرسومات الواردة فيه مأخوذة من المرجع 4. ونُنبّه أيضا إلى أنّ مفهوم التعاكس يمكن تعميمه إلى فضاءات ذات بعد أعلى وأنّ دراسته تسمّى الهندسة التعاكسية.

1. التعاكس الدائريّ

لتكن $\omega(x_0,y_0)$ نقطة من المستوي $\mathfrak{E}_2$ وليكن k عددا حقيقيا غير منعدم. التعاكس الذي مركزه أو قطبه ω وقوّته k هو التطبيق (الامتثالي أو الحافظ للزوايا (محلّيا)) [3] $\mathcal{I}_{(\omega,k)}$ من $\mathfrak{E}_2 \setminus \{\omega\}$ في نفسه والذي يُرفِق بالنقطة M النقطة M' بحيث يكون

$$M' \in (\omega M) \text{ و } \overline{\omega M}.\overline{\omega M'} = k.$$

يُعرَّف هذا الالتفاف (الالتفاف هو تقابل يساوي تقابله العكسيّ) في الإحداثيات الديكارتية بالعلاقتين:

$$x' = x_0 + \frac{k(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

$$y' = y_0 + \frac{k(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

يُمدّد التعاكس $\mathcal{I}_{(\omega,k)}$ إلى $\mathfrak{E}_2 \cup \{\infty\}$ بإضافة العلاقتين

$$\mathcal{I}(\omega) = \infty \text{ و } \mathcal{I}(\infty) = \omega.$$

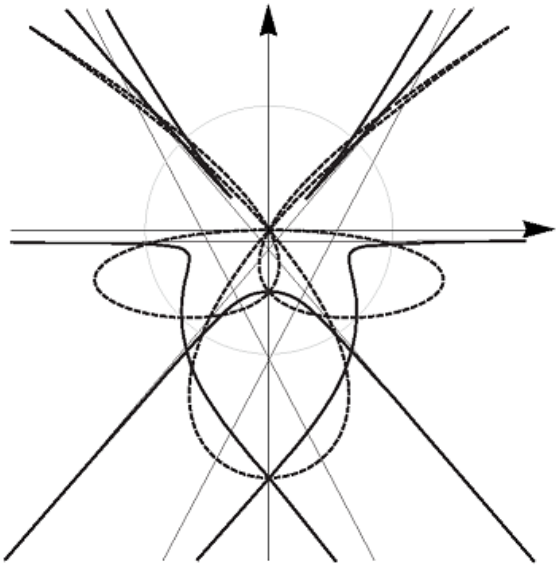
أمثلة

- الدائرة $\mathcal{C}(\omega,\sqrt{k})$، والتخيلية إذا كان $k<0$، ثابتة نقطة بنقطة؛ هذه هي دائرة التعاكس. نقول إنّ $\mathcal{I}_{(\omega,k)}$ هو التعاكس بالنسبة إلى هذه الدائرة.
- المستقيمات التي تحوي القطب ω والدوائر بحيث تساوي قوة ω بالنسبة إليها العدد k (تشكّل هذه الدوائر شبكة [4])، والمتعامدة مع دائرة التعاكس، ثابتة إجماليا.
- معكوس دائرة لا تحوي القطب دائرة ومعكوس دائرة تحوي هذا القطب مستقيم [5].

- إذن، معكوس دائرة معمّمة (المستقيم دائرة قطرها غير منته) دائرةٌ معمّمة.
- معكوس قطع مكافئ منحن قلبيّ.
- معكوس قطع زائد هو فتيلة برنولي.
- معكوس منحن جبريّ من الدرجة n يقبل النقطتين الدوريتين كنقطتين من الترتيب p بالنسبة إلى قطب تعاكسٍ من الترتيب q (بالنسبة إلى المنحني الأصليّ) هو منحن جبريّ من الدرجة $2n-2p-q$ ، يقبل النقطتين الدوريتين كنقطتين من الترتيب $n-p-q$ والقطب كنقطة من الترتيب $n-2p$. [6]
- يمثّل الشكل 1 (بالخط المستمر) معكوس المنحني (بالخط المتقطع) المحدّد بالتوسيط

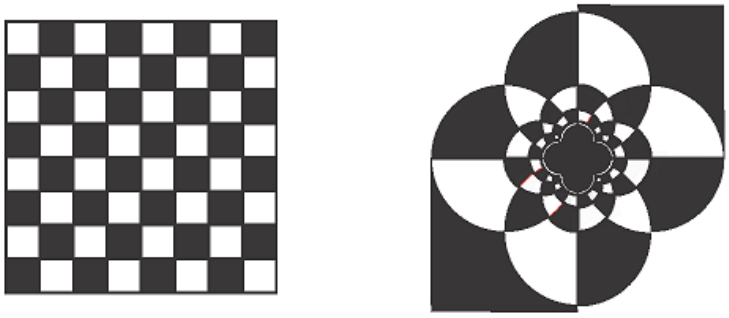
$$x=\cos t+\sin 4t, y=\cos 2t+\sin 3t$$

بالنسبة إلى دائرة الوَحدة.



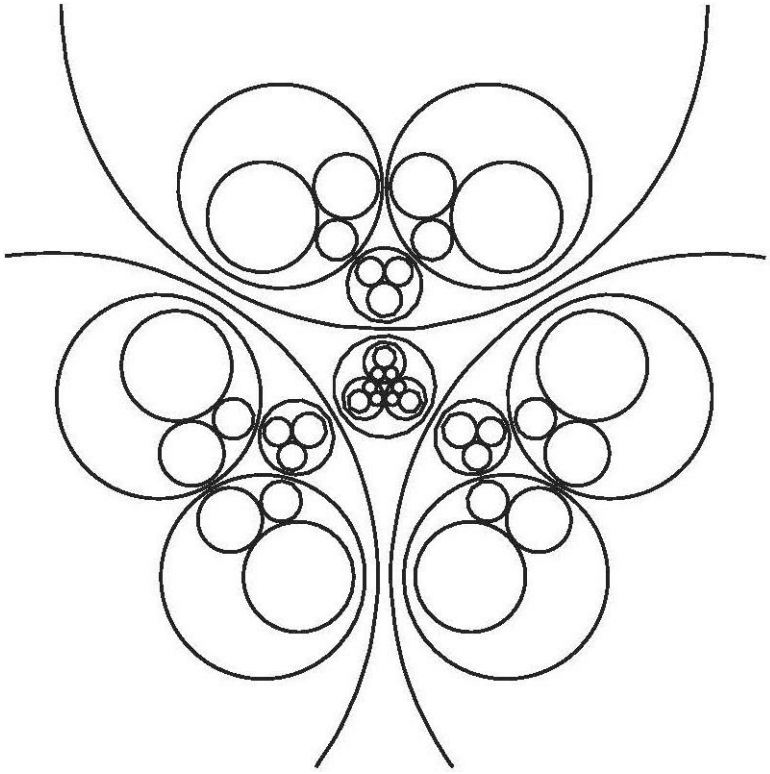
الشكل 1

- يوضّح الشكل 2 رقعةَ شطرنج مركزها النقطة $(0,0)$ وصورتَها بتعاكس قطبه $(0,0)$ وقوته عدد صغير [7]



الشكل 2

- يمثّل الشكل 3 تعاكسا متكرّرا لمجموعة من الدوائر موزّعة بانتظام حول المبدأ $(0,0)$ ودائرة متمركزة في هذا المبدأ لا تلتقي بها.



الشكل 3

2. التعاكس بالنسبة إلى مخروطيّ

نعني هنا بالاسم "مخروطيّ" ما يسمّى تقليديا "قَطْعا مخروطيا" أي تقاطع مخروط ومستو.

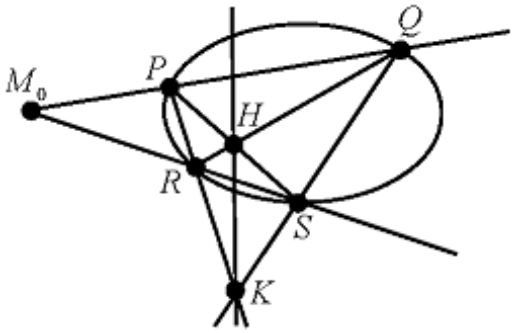
نُعطي أوّلاً التعريفَ العامَّ للتعاكس بالنسبة إلى مخروطيّ أيّا كانّ. ثم نتبع ذلك بتعريفه بشكل منفصل بالنسبة إلى كلٍّ من المخروطيّات الفعلية الثلاثة.

نذكّر أيضا أن مجموعة المرافقات [8] لنقطة M_0 بالنسبة إلى مخروطيّ فعليّ هي مستقيم يسمّى قطبيَّ M_0 بالنسبة إلى هذا المخروطيّ.

يشمل هذا المستقيم نقطتَيْ تماس المُماسين (الحقيقيين أو غير الحقيقيين)، اللذين يشملان M_0.

إذا كان مستقيمان يشملان M_0 ويلتقيان بالمخروطيّ في P ، Q و R ، S، فإن قطبيَّ M_0 يشمل النقطتين K المشتركة بين المستقيمين (PR) و (QS) و H المشتركة بين المستقيمين (PS) و (QR) (الشكل 4).

قطبيُّ نقطة تنتمي إلى المخروطيّ هو المُماس في هذه النقطة.



الشكل 4

يمكننا الآن تعريف التعاكس الذي قطبه ω بالنسبة إلى مخروطيّ $\mathcal{C}$، في المستوي $\mathfrak{E}_2$، بأنّه التطبيق من $\mathfrak{E}_2 \setminus \{\omega\}$ في نفسه والذي يُرفِق بالنقطة M النقطة M' تَلاقي المستقيم (ωM) مع قطبيّ M بالنسبة إلى $\mathcal{C}$.

ليكن المخروطيّ $\mathcal{C}$ الأكثر عمومية، أي المعرّف بالمعادلة العامّة

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0.$$

يُعرّف قطبيّ (أو المستقيم القطبيّ لـ) النقطة $M(\lambda,\mu)$ بالنسبة إلى $\mathcal{C}$ بالمعادلة

$$(d+a\lambda+b\mu)x+(e+b\lambda+c\mu)y+f+d\lambda+e\mu=0.$$

يُستخلص من ذلك أنّ التعاكس بالنسبة إلى هذا المنحني والذي قطبه $\omega(x_0,y_0)$ يُعَرّف بالعلاقتين:

$$x'=-\frac{(f+dx+ey)(x-x_0)+(e+bx+cy)(-yx_0+xy_0)}{(d+ax+by)(x-x_0)+(e+bx+cy)(y-y_0)},$$

$$y'=-\frac{(f+dx+ey)(y-y_0)-(d+ax+by)(-yx_0+xy_0)}{(d+ax+by)(x-x_0)+(e+bx+cy)(y-y_0)}.$$

3. التعاكس الناقصيّ

لنفترض أنّ $\mathfrak{E}_{a,b}$ هو القطع الناقص (أو الناقصيّ) في المستوي $\mathfrak{E}_2$ والذي مركزه $O(0,0)$ ونصفا محوريه a و b. التعاكس الذي قطبه O بالنسبة إلى $\mathfrak{E}_{a,b}$ هو التطبيق من $\mathfrak{E}_2 \setminus \{O\}$ في نفسه والذي يُرفِق بالنقطة M النقطة M' من نصف المستقيم $[OM)$ بحيث يكون

$$\overline{OM}.\overline{OM'}=OI^2.$$

أين I هي نقطة تلاقي $[OM)$ مع القطع الناقص $\mathfrak{E}_{a,b}$. تُسمّى النقطة O مركزَ التعاكس أو قطبَه و OI شعاعَه أو نصفَ قطره. $\mathfrak{E}_{a,b}$ هو القطع الناقص للتعاكس. إنه مجموعة النقط الثابتة بالنسبة إلى هذا التعاكس. معكوس النقطة M أي M' هو نقطة تلاقي المستقيم (OM) مع قطبيّ M بالنسبة إلى $\mathfrak{E}_{a,b}$ ولدينا [9]

$$\overline{OM}.\overline{OM'}=\frac{a^2b^2\left(1+m^2\right)}{b^2+a^2m^2}$$

حيث m هو معامل توجيه المستقيم (OM) المُقاس من المحور الرئيسيّ للمخروطيّ. إذا كان m غير منتهٍ، يكون

$$\overline{OM}.\overline{OM'}=b^2.$$

إذا كان القطع الناقص $\mathfrak{E}_{a,b}$ معطًى بالمعادلة

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

فإن التعاكس بالنسبة إلى $\mathfrak{E}_{a,b}$ معرّف بالآتي

$$(x,y)\mapsto\left(\frac{a^2b^2x}{b^2x^2+a^2y^2},\frac{a^2b^2y}{b^2x^2+a^2y^2}\right).$$

التعاكس بالنسبة إلى قطع ناقص التفافيّ (تضامنيّ).

أمثلة

- كلّ مستقيم يشمل القطب ثابت إجماليا.
- صورة مستقيم لا يشمل القطب هي قطع ناقص يشمل هذا القطب.

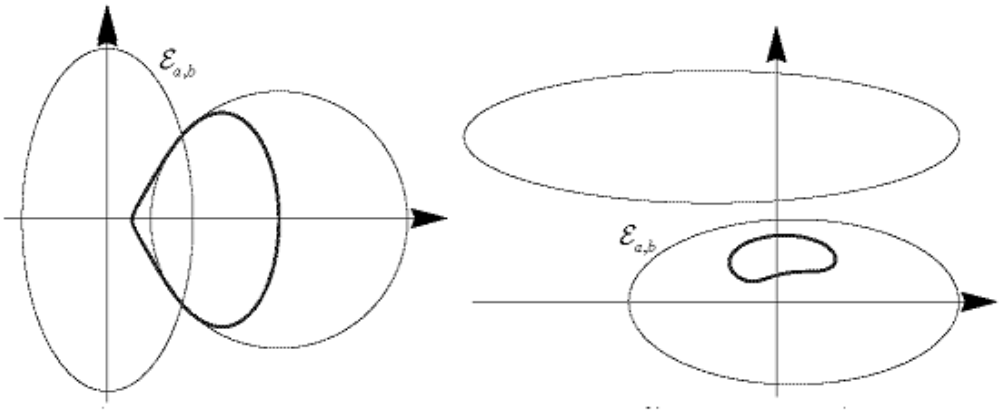
- معكوس مخروطيّ ليس له نفس "نصف- الشكل" مثل القطع الناقص للتعاكس (خاصية نفس نصف - الشكل بين المخروطيات تعني هنا أن لهذه المخروطيات نفسَ التباعد المركزيّ وأنّ محاورها متوازية على التوالي) ويشمل قطب التعاكس هو منحنٍ من الدرجة الثالثة.
- معكوس مخروطيّ ليس له نفس نصف- الشكل مثل القطع الناقص للتعاكس ولا يشمل القطب هو منحن من الدرجة الرابعة.
- معكوس منحن محدّد بالتوسيط

$$t \mapsto (f(t), g(t))$$

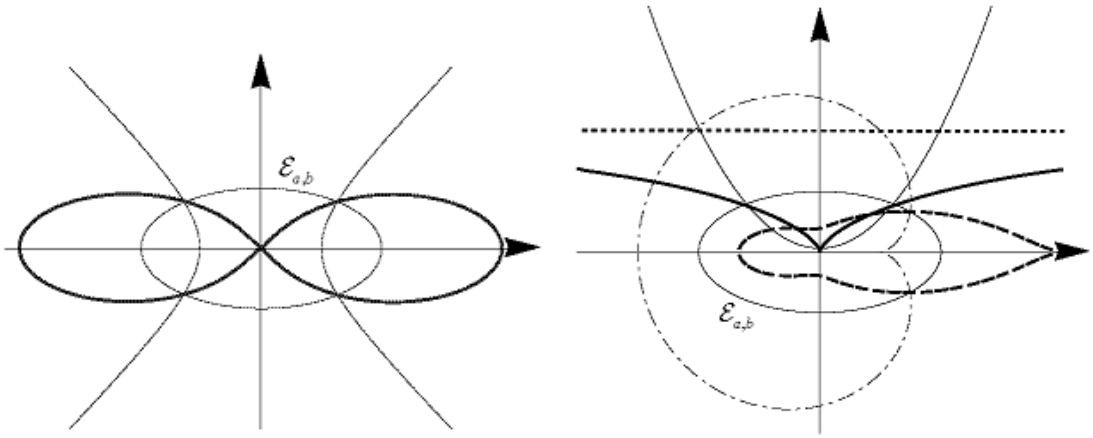
معرّف بالتوسيط

$$t \mapsto \left(\frac{a^2 b^2 f(t)}{b^2 f(t)^2 + a^2 g(t)^2}, \frac{a^2 b^2 g(t)}{b^2 f(t)^2 + a^2 g(t)^2} \right).$$

يجدُر بالذكر أنّ التعاكس الدائريّ هو حالة خاصة مهمّة جدّا للتعاكس الناقصيّ، إذ أن الدائرة هي قطع ناقص خاص.



الشكل 5: معكوس دائرة (عن اليسار) ومعكوس قطع ناقص (عن اليمين).



الشكل 6: معكوس قطع زائد (عن اليسار) ومعكوس قطع مكافئ ومعكوس(منحن) قلبيّ (عن اليمين).

4. التعاكس الزائديّ

لنفترض أنّ $\mathcal{H}_{a,b}$ هو القطع الزائد (أو الزائديّ) في المستوي $\mathcal{E}_2$ والذي مركزه $O(0,0)$ ونصفا محوريه a و b.
التعاكس الذي قطبه O بالنسبة إلى $\mathcal{H}_{a,b}$ هو التطبيق من $\mathcal{E}_2 \setminus \{O\}$ في نفسه والذي يرفق بالنقطة M النقطة M' من المستقيم (OM) بحيث يكون

$$\overline{OM}.\overline{OM'} = \frac{a^2b^2\left(1+m^2\right)}{b^2-a^2m^2}$$

أين m هو معامل توجيه المستقيم (OM) المُقاس من المحور الرئيسيّ للمخروطيّ. إذا كان m غير منتهٍ، يكون

$$\overline{OM}.\overline{OM'} = -b^2.$$

تُسمّى النقطة O مركز التعاكس أو قطبه و $\mathcal{H}_{a,b}$ قطعه الزائد [10].
إذا كان القطع الزائد $\mathcal{H}_{a,b}$ مُعرَّفا بالمعادلة

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

فإنّ التعاكس بالنسبة إلى $\mathcal{H}_{a,b}$ معرّف بالآتي

$$(x,y)\mapsto\left(\frac{a^2b^2x}{b^2x^2-a^2y^2},\frac{a^2b^2y}{b^2x^2-a^2y^2}\right).$$

التعاكس بالنسبة إلى قطع زائد التفافيّ.

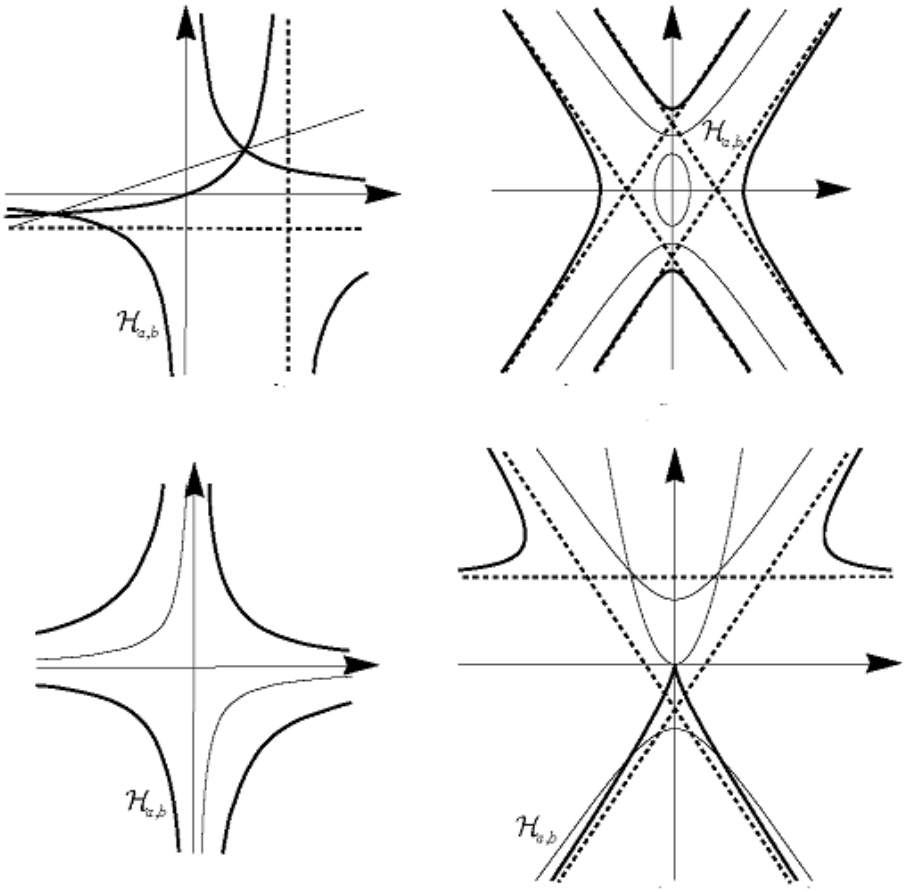
أمثلة

- صورة مستقيم يوازي مستقيما مقاربا لقطع التعاكس الزائد مستقيم يوازي المستقيم المقارب الآخر.
- معكوس مستقيم لا يوازي مستقيما مقاربا للقطع الزائد هذا هو القطع الزائد الذي يحتوي على القطب ومستقيماه المقاربان موازيان لذلكما الخاصين بالقطع الزائد للتعاكس.
- معكوس قطع زائد لا يشمل القطب ويكون مستقيماه المقاربان موازيين لذلكما التابعين للقطع الزائد للتعاكس هو قطع زائد يتمتّع بنفس الخصائص؛ إذا كان القطع الزائد المراد تحويله متمركزًا في القطب، فإن صورته تتمركز في القطب أيضًا.
- معكوس منحن محدّد بالتوسيط

$$t\mapsto\left(f(t),g(t)\right)$$

معرّف بالتوسيط

$$t\mapsto\left(\frac{a^2b^2f(t)}{b^2f(t)^2-a^2g(t)^2},\frac{a^2b^2g(t)}{b^2f(t)^2-a^2g(t)^2}\right).$$



الشكل 7: معكوس مستقيم (في الأعلى عن اليسار)، معكوس قطع ناقص (في الأعلى عن اليمين)، معكوس قطع زائد (في الأسفل عن اليسار) ومعكوس قطع مكافئ (في الأسفل عن اليمين).

5. التعاكس المكافئيّ

لنفترض أن $\mathcal{P}$ هو القطع المكافئ (أو المكافئيّ) المعرّف في الإحداثيات الديكارتية بالمعادلة

$$y^2 - 2px = 0$$

ولتكن $\omega(x_0, y_0)$ نقطة محدّدة في المستوي.

يُعرّف قطبيّ أيّ نقطة $M(\alpha, \beta)$ بالنسبة إلى $\mathcal{P}$ بالمعادلة الديكارتية

$$px - \beta y + p\alpha = 0.$$

لأيّ نقطة $M(\alpha, \beta)$ تختلف عن ω فإنّ تلاقي المستقيم (ωM) مع قطبيّ M بالنسبة إلى $\mathcal{P}$ هو النقطة M' التي إحداثياها

$$(\alpha', \beta') = \left(-\frac{p\alpha^2 - p\alpha x_0 + \beta^2 x_0 - \alpha\beta y_0}{p\alpha - \beta^2 - px_0 + \beta y_0}, -\frac{p(\alpha\beta + \beta x_0 - 2\alpha y_0)}{p\alpha - \beta^2 - px_0 + \beta y_0} \right).$$

التعاكس $\mathcal{I}_{(\omega,\mathcal{P})}$ بالنسبة إلى $\mathcal{P}$ والذي قطبه ω أو التعاكس المكافئيّ الذي قطبه ω هو التطبيق من المستوي في نفسه والذي يُرفِق بالنقطة M المختلفةِ عن ω النقطةَ M' المعرّفة كما سبق، أي أنه يُعرّف بالآتي

$$(x, y) \mapsto \left(-\frac{px^2 - pxx_0 + y^2 x_0 - xyy_0}{px - y^2 - px_0 + yy_0}, -\frac{p(xy + yx_0 - 2xy_0)}{px - y^2 - px_0 + yy_0} \right).$$

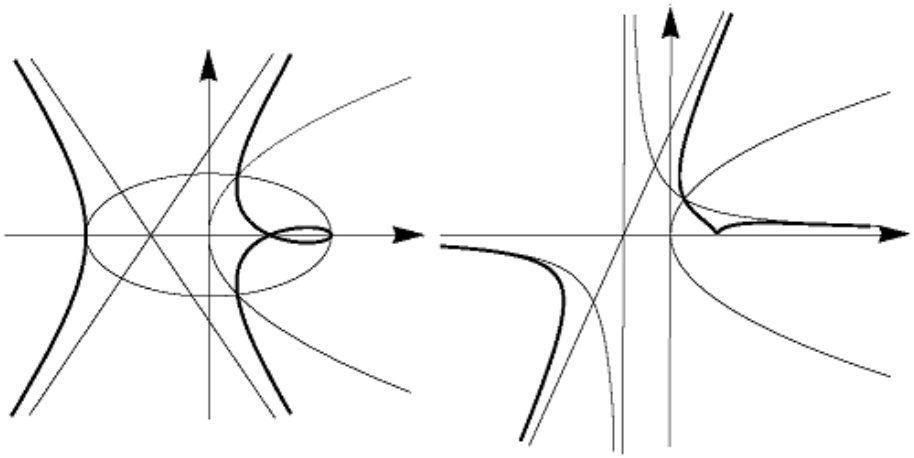
صورة المنحني المعرّف بالتوسيط

$$t \mapsto (f(t), g(t))$$

بالتعاكس $\mathcal{I}_{(\omega,\mathcal{P})}$، معطىً بالتوسيط

$$t \mapsto \begin{cases} -\dfrac{pf(t)^2 - pf(t)x_0 + g(t)^2 x_0 - f(t)g(t)y_0}{pf(t) - g(t)^2 - px_0 + g(t)y_0} \\ -\dfrac{p\left(f(t)g(t) + g(t)x_0 - 2f(t)y_0\right)}{pf(t) - g(t)^2 - px_0 + g(t)y_0} \end{cases}.$$

نظرا إلى أنّ (المستقيم) القطبيّ لنقطة من منحن هو المُماس لهذا المنحني في هذه النقطة، فإن القطع المكافئ $\mathcal{P}$ ثابت نقطة بنقطة بالتعاكس $\mathcal{I}_{(\omega,\mathcal{P})}$ ؛ ويُستنتج من ذلك أنّ صورة منحن ما، بهذا التعاكس، تشمل نقطتَيْ التلاقي المحتملتين بين المنحني الأصليّ و $\mathcal{P}$ [11].



الشكل 8: المعكوس المكافئيّ لقطع ناقص (عن اليسار)
والمعكوس المكافئيّ لقطع زائد (عن اليمين).

التعليقات

[1] التعاكس بالنسبة إلى كرة (في الفضاء الذي نعيش فيه) يجعل من الممكن طلاء الوجه الداخليّ للكرة دون تقطيعها (نُحوّل الكرة إلى مستو، نُقوم بطلاء هذا المستوي ثمّ نُحوّله إلى الكرة الأصلية).
التعاكس يسمح أيضًا بحبس أسد في قفص. لهذه الغاية نضع قفصًا كرويًا في الصحراء، ندخلُه ونُغلقه. نقوم بعد ذلك بإجراء تعاكس بالنسبة إلى القفص. النتيجة هي أنّ الأسد سيُصبح داخل القفص، ونحن خارجه.
/https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/lion_hunting

[2] ينفرد المرجع 4 (الصفحة 309)، حتى إثبات العكس، بتعريف التعاكس بالنسبة إلى منحنٍ جبريّ مستوٍ من الدرجة n، أيّا كان العدد الطبيعيّ n، مع التنبيه إلى أنّ هذا التعريف يعتمد على مفهوم المنحنيات القطبية المتتابعة. أمّا التعاكس بالنسبة إلى سطح جبريّ، أيّا كان، فلا أعرف له أثرا، باستثناء المرجع 5 (الصفحة 655) والذي يقدّم، فضلا عن ذلك، حالاتٍ خاصةً كالتعاكس بالنسبة إلى سطح تربيعيّ أيّا كان، أي بالنسبة إلى كرة وشبيه ناقص وشبيه زائد (ذي سِماط واحد وذي سماطين) وشبيه مكافئ.

[3] التطبيق f من ميدان من المستوي في المستوي امتثاليٌّ (أو حافظٌ للزوايا)، إذا كان يحافظ (محليًا) على الزوايا بين منحنيين مُوجَّهَين، أيْ إنّه إذا كان منحنيان C_1 و C_2 يلتقيان في النقطة A، ويشكّل شعاعاهما المُماسان

في A (في اتجاه التوجيه) زاويةً قياسها α، فإنّ الشعاعين المُماسين للمنحنيين $f\langle C_1\rangle$ و $f\langle C_2\rangle$ في $f(A)$ يشكّلان هما أيضًا زاويةً قياسها α. بتعبير آخر، إنّ f تشابه مباشر محليًا.

[4] نسمّي شبكةً غيرَ منحلّة من الدوائر مجموعةَ جميع الدوائر التي تكون بالنسبة إليها قوة نقطة مُعيّنة، تُسمّى مركز الشبكة، مساويةً عددا معيّنا. ونسمّي شبكة منحلّة من الدوائر مجموعةَ جميع الدوائر التي تنتمي مراكزها إلى مستقيم معيّن، يسمّى المستقيم الأساسيّ لهذه الشبكة.

[5] من هذا يُستنتج تحويلُ حركة دائرية إلى حركة مستقيمة.

[6] في الهندسة الإسقاطية، النقطتان الدائريتان (أو الدوريتان أو أيضا المتناحيتان)، هما نقطتان خاصتان في اللامنتهي، في المستوي الإسقاطي المركّب، تنتميان إلى تراكُب كلّ دائرة حقيقية والمعرّفِ في الإحداثيات المتجانسة بمعادلة من الشكل

$$x^2+y^2-2axz-2byz+cz^2=0.$$

غالبا ما تؤخذ النقطتان $I(1;i;0)$ و $J(1;-i;0)$ لهاتين النقطتين.

[7] M. Gardner, The Sixth Book of Mathematical Diversions, University of Chicago Press,1984, p. 244-245.

[8] تكون النقطتان M_0 و M' مترافقتين بالنسبة إلى مخروطيّ $\mathcal{C}$ إذا كان المستقيم (M_0M') يلتقي $\mathcal{C}$ في نقطتين P و Q بحيث يكون التقسيم $[M_0, M', P, Q]$ توافقيا، أيْ بحيث يكون

$$\frac{\overline{PM_0}}{\overline{PM'}}=-\frac{\overline{QM_0}}{\overline{QM'}}.$$

[9] يمكننا إذن، آخذين بعين الاعتبار تعريفَ التعاكس بالنسبة إلى مخروطيّ ما، الواردَ أعلاه، أن نعرّف التعاكس بالنسبة إلى قطع ناقص قطبه نقطةٌ من المستوي، أيّا كانت هذه النقطة.

[10] يمكننا أيضًا في الحالة الزائدية تعريفُ التعاكس بالنسبة إلى قطع زائد معطًى وقطبه أيّ نقطة في المستوي.

[11] هذا صحيح أيضا في الحالة الناقصية وفي الحالة الزائدية.

المراجع

1. D.E. Blair, Inversion Theory and Conformal Mapping, American Mathematical Society, 2000.
2. R. Caddeo, G. Franzoni, P. Piu, Inverting Beauty, Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Cagliari, Via Ospedale 72, 09124 Cagliari, ITALIA, 2010-2011.
3. N.A. Childress, Inversion with Respect to the Central Conics, Mathematics Magazine Vol. 38, No. 3, 1965, pp. 147-149.
4. Hamza Khelif, Le jardin des courbes, Dictionnaire raisonné des courbes planes célèbres et remarquables, 2e édition, 966 pages. KDP Amazon, 2020.
5. Hamza Khelif, Le jardin des surfaces, Dictionnaire raisonné des courbes gauches, des surfaces et d'autres variétés célèbres et remarquables, 2048 pages. KDP Amazon, 2020.
6. J.L. Ramirez, Inversions in an Ellipse, Forum Geometricorum Volume 14 (2014) 107–115.
7. D. Wells, The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry, PENGUIN BOOKS, 1991.