حول مفهوم الطريقة في الرياضيات ومشكلة اليقين!
طريقة كافالييري نموذجا

صادق بوروبي
أستاذ بكلية الرياضيات، جامعة هواري بومدين للعلوم والتكنولوجيا، الجزائر
bouroubis@gmail.com

مقدمة

بالعودة إلى القاموس، نجد التعريف التالي:

"الطريقة هي الأسلوب الذي يتم من خلاله توجيه الفكر والتعبير عنه وفقًا لمبادئ المعرفة."

يتمثل هدف طريقة ما في السماح بالحصول على نتائج ذات شكل متطابق من خلال خصائص مشتركة. فعندما يتحدث ديكارت Descartes ولايبنتز Leibniz عن الطريقة في مجال المعرفة، فإنهما يقصدان بذلك اعتماد منهج يتمثل في بناء حساب متكامل يتم من خلاله تقليص مجال المعرفة المدروسة لنموذج عمليات هذا الحساب. وانطلاقا من هذه النظرة، نكون أمام مشكلة حقيقية تستوجب الجواب عن السؤالين التاليين:

1- ما الذي يجعل الطريقة صالحة؟
2- وما الذي يضمن أنّ الطريقة تنتج دائما نتائج صحيحة؟

في هذه المقالة، سنقدّم نموذجا لطريقة رياضية، لعبت دورًا هامًا في تطوير الحساب التكاملي ولكنها أثارت العديد من الجدل والانتقادات اللاذعة، تتمثل في طريقة كافالييري للأجزاء غير القابلة للتجزئة.

1. بونافينتورا كافالييري

بونافينتورا كافالييري Bonaventura Cavalieri هو رياضياتي ورجل دين إيطالي، وُلِد في ميلانو عام 1598 وتُوفي في بولونيا عام 1647. تُعدُّ دراسته لأعمال أقليدس Euclid من أهم الأسباب التي أثارت اهتمامه بالرياضيات. خلال إقامته في دير ميلانو، لاحظ الكاردينال فريدريكو بوروميو Frederico Borromeo عبقرية كافالييري فقدّمه للعالم المشهور في ذلك الوقت جاليليو Galileo.

بونافينتورا كافالييري

درس كافاليري الهندسة والرياضيات مع بنديتو كاستيلي Benedetto Castelli الذي كان يدرس في جامعة بيزا، فتقدّم كافاليري بطلب ليشغل كرسي الرياضيات في جامعة بولونيا عام 1619، لكنه اعتبر آنذاك شاباً صغيرا جداً لشغل مثل هذا المنصب المرموق. ثم جرّب حظه مرة أخرى في نفس الجامعة عندما غادر كاستيلي من بيزا إلى روما، ولكنه جوبه بالرفض مرة أخرى. في عام 1629، تولى منصب كرسي الرياضيات في بولونيا ودرَّس بها حتى وفاته في عام 1647.

تتناول أعمال كافاليري المجالات الرياضية والبصرية والفلكية. وكان له دور كبير في الانتشار السريع للوغاريتمات في إيطاليا حيث نشر جداول تحتوي على لوغاريتمات الدوال المثلثية للمستخدمين في علم الفلك. ففي عام 1632، نشر كتابًا بعنوان "Directorium universale uranometricum"، وفيه قدّم جداول للنسب المثلثية بثماني أرقام عشرية مصحوبة بلوغاريتماتها. بالإضافة إلى ذلك عمل كافاليري على نشر كتب عديدة أخرى في علم التنجيم، واحد منها في عام 1639 والآخر في عام 1646، وكان هذا آخر أعماله.

بنديتو كاستيلي

فريدريكو بوروميو

تواصل كافاليري عن طريق المراسلة مع عدد كبير من العلماء في الرياضيات من بينهم جاليليو وميرسين Mersenne وتوريتشيلي Torricelli وفيفياني Viviani. تحتوي مراسلاته مع جاليليو على أكثر من 112 رسالة.

فيفياني

توريتشيلي

ميرسين

عند وصوله إلى بولونيا، كان كافاليري قد أتمّ بالفعل تصميم طريقته الموسومة بالأجزاء غير القابلة للتجزئة method of indivisibles، والتي تمّ تقديمها في عام 1635 في كتابه "Geometria Indivisibilibus Continuorum Noua Qudam Ratione Promota".

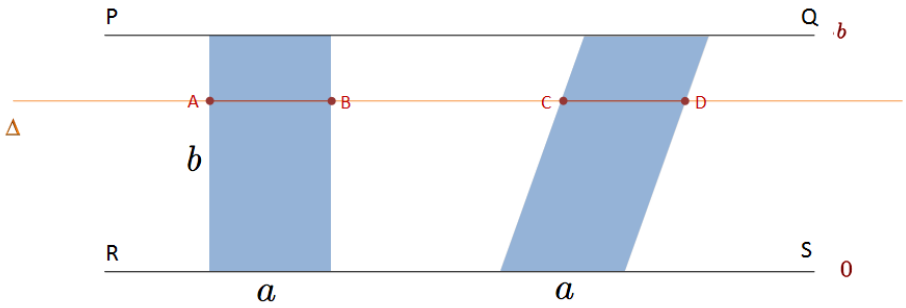
وقد لعبت هذه الطريقة دورًا كبيرًا في تطوير الحساب التكاملي. في هذا الكتاب، وصف كافاليري طريقته دون تحديد واضح لما يعنيه بـ "غير القابلة للتجزئة"! وكانت تُعدُّ نسخة معدّلة من طريقة الاستنفاذ method of exhaustion التي استخدمها أرخميدس Archimedes، والتي تضمّنت نظرية الكميات الهندسية اللامتناهية في الصغر لكيبلر Kepler.

2. تقدير المساحات

تنبع طريقة الأجزاء غير القابلة للتجزئة من مفهوم قديم للمادة تعود أصوله إلى رأي بعض الفلاسفة الذين يرون أن المادة تتألف من ذرات تختلف طبيعتها عن طبيعة المادة. بالنسبة لكافاليري، الشكل الهندسي السطحي يتألف من خطوط، بينما الجسم ثلاثي الأبعاد يتألف من أسطح، وهو مجموع هذه الأجزاء غير القابلة للتجزئة التي تشكل المساحة السطحية أو حجم الجسم ثلاثي الأبعاد. يمكن صياغة أساس طريقته للسطوح على النحو التالي:

> إذا كان شكلان مستويان محصورين بين خطين متوازيين، وكان لجميع تقاطعات هذين الشكلين مع خط مُوازٍ للخطين الأوليين نفس الطول، فإنه يكون للشكلين المستويين نفس المساحة.

لفهم فحوى هذه الفرضية ولتوضيح كيف استخدمها كافاليري لمقارنة مساحتين من شكلين مستويين، نأخذ مثالاً لشكلين بسيطين وهما المستطيل ومتوازي الأضلاع كما هو موضح في الشكل أدناه.



$$\sum a \;=\; ab \;=\; \sum a$$

بالكتابة الحديثة، تتمثل فرضية كافاليري فيما يلي:

$$\int_0^b a\ dx = ab$$

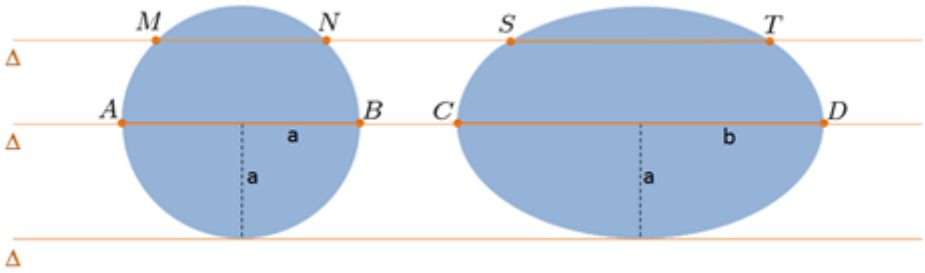
لقد صاغ كافاليري هذه النتيجة كالآتي:

> مساحة متوازي الأضلاع تساوي حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه.

يمكن تعميم طريقة كافاليري لإيجاد مساحة بعض الأشكال عندما تكون مساحة عناصر الأجزاء غير القابلة للتجزئة في نسبة معينة، وذلك كالتالي:

> إذا كان لشكلين هندسيين نفس الارتفاع، وكانت المقاطع التي نحصل عليها بواسطة خطوط موازية للقواعد وعلى بعد متساوٍ منها في نسبة محددة دائمًا، فإن مساحتي الشكلين تكونان في نفس النسبة.

يبدو أن كافاليري قد استوحى إلهامه هذا من أعمال كيبلر الذي وجد بشكل خاص مساحة القطع الناقص بشكل مشابه، يمكن توضيحه كما يلي:

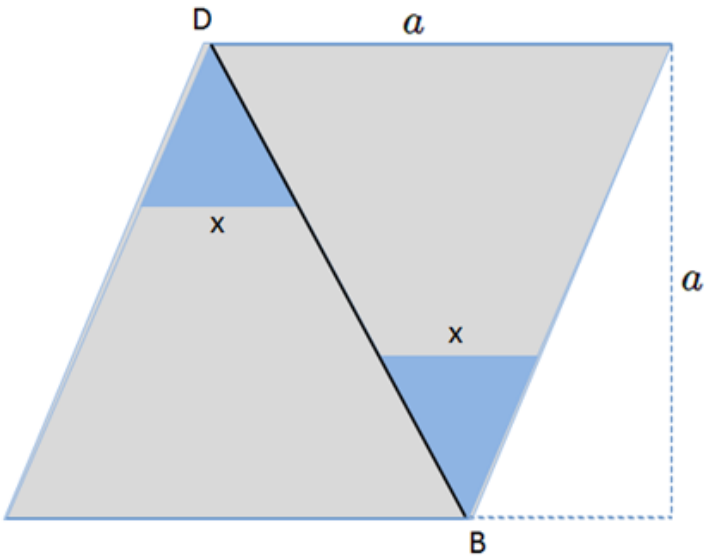


$$\frac{ST}{MN}=\frac{CD}{AB}=\frac{2b}{2a}\Longrightarrow\frac{\text{مساحة قطع الناقص}}{\text{مساحة القرص}}=\frac{b}{a}\Longrightarrow\text{مساحة قطع الناقص}=\frac{b}{a}\times\text{مساحة القرص}=\pi ab$$

3. قوة الخطوط

استخدم كافاليري هذه الطريقة لمقارنة ما أسماه بـقوى الخطوط Powers of lines في متوازي الأضلاع.

ولتوضيح الفكرة نتأمل في المثال التالي:



$$\sum a=2\sum x=a^2$$

بالكتابة الحديثة، تتمثل هذه الفرضية كما يلي:

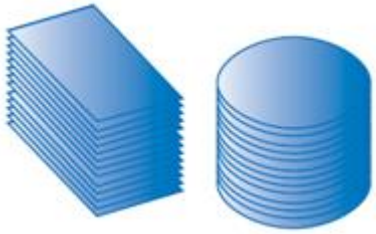
$$2\int_0^a x\,dx=a^2$$

4. حساب الحجوم

استخدم كافاليري نفس الطريقة لحساب حجوم مختلفة من الأشكال الصلبة، وبموجب مبدأ الأجزاء غير القابلة للتجزئة، يمكن التعبير عن هذه الطريقة على النحو التالي:

> إذا كان جسمان صلبان موجودين بين مستويين متوازيين، وكانت لجميع مقاطع هذين الجسمين مع مستوٍ مُوازٍ للمستويين الأوليين نفس المساحة، فإنه يكون لهذين الجسمين نفس الحجم.

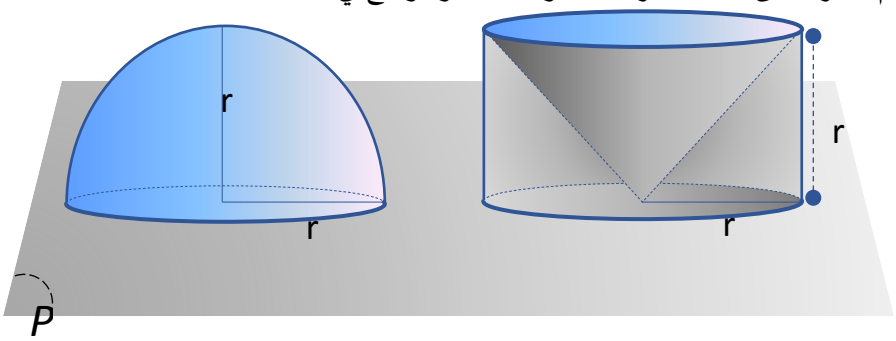
يمكن توضيح هذه النتيجة باستخدام مكعب مستطيل الشكل يشبه كومة من البطاقات المستطيلة وأسطوانة دائرية الشكل تشبه كومة من البطاقات الدائرية. إذا كان لكلتي الكومتين نفس الارتفاع وكانت مساحة البطاقات الدائرية تساوي مساحة البطاقات المستطيلة، فإن الكومتين تشغلان أحجامًا متساوية.



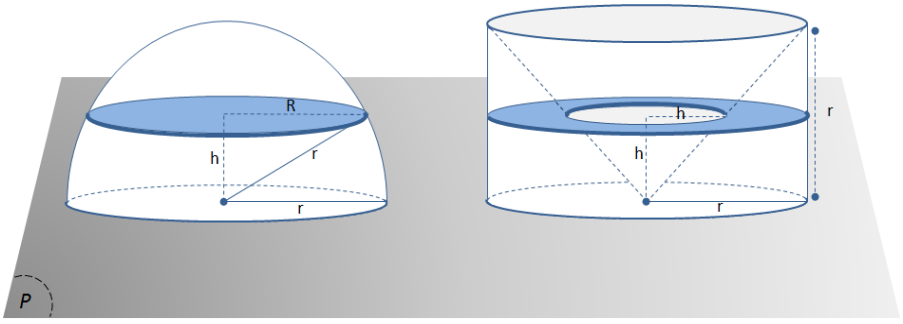
من خلال هذه الطريقة القائمة على مبدأ الأجزاء غير القابلة للتجزئة، استنتج كافاليري أن حجم الأسطوانة يساوي ضرب مساحة قاعدتها في ارتفاعها، أي

$$V = \pi r^2 h$$

استخدم كافاليري نفس الطريقة لحساب حجم الكرة، وكانت الفكرة لا تختلف كثيرًا عن طريقة أرخميدس. لقد اعتبر نصف كرة وأسطوانة بنفس نصف القطر مع ارتفاع الأسطوانة يساوي نصف القطر كذلك. وقد اعتبر أيضًا أن الأسطوانة تم حفرها على شكل مخروط مقلوب كما هو موضح في الشكل أدناه:



نلاحظ في هذا الشكل أنه تم وضع الجسمين بين مستويين متوازيين، نظراً لأن ارتفاع الأسطوانة يساوي نصف قطر الكرة. إذا تخيلنا الآن مستو مُوازٍ للمستوى P، يقطع كلا الجسمين الصلبين، والمسافة بين هذا المستوي والمستوي P تساوي h، فإن تقاطع هذا المستوي مع نصف الكرة ينتج قرصًا، ومع الجسم الأسطواني الآخر حلقة، كما هو موضح في الشكل أدناه:



نصف قطر القرص هو:

$$R = \sqrt{r^2 - h^2}$$

مساحة القرص هي:

$$A = \pi \left(r^2 - h^2\right)$$

ومساحة الحلقة هي:

$$A = \pi r^2 - \pi h^2 = \pi\left(r^2 - h^2\right)$$

استنتج كافاليري من ذلك أن حجم نصف الكرة يساوي الفرق بين حجم الأسطوانة وحجم المخروط. لكن، حجم أسطوانة نصف قطرها r وارتفاعها r. وعليه:

$$V_{\text{الأسطوانة}} = \pi r^3$$

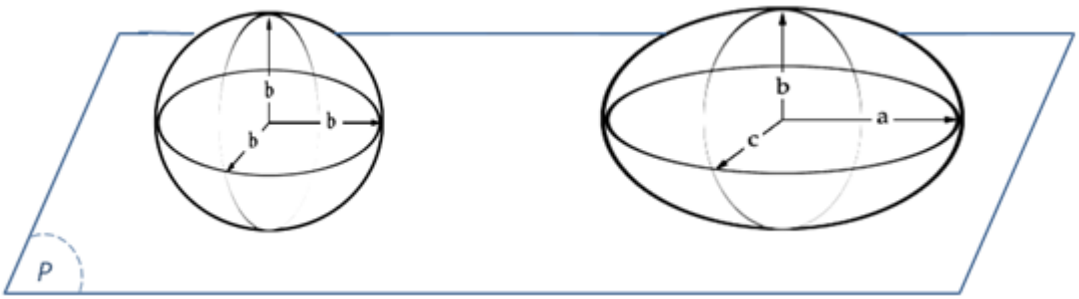
ويساوي حجم المخروط ثلث حجم الأسطوانة ذات نفس نصف القطر ونفس الارتفاع. استنتج كافاليري إذن حجم نصف الكرة:

$$V_{\text{الكرة}/2} = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$$

وبالتالي حجم الكرة:

$$V_{\text{الكرة}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

هذا ما تشير إليه طريقة كافاليري التالية، التي تُستخدم في قياس الحجوم Stereometry.



إذا كان لدى جسمين صلبين نفس الارتفاع، وكانت القطع التي نحصل عليها بواسطة مستويات موازية للقواعد وعلى بعد متساوٍ منها في نسبة محددة دائمًا، فإن حجمي الجسمين الصلبين يكونان في نفس النسبة.

$$\frac{\pi ac}{\pi b^2} = \frac{\text{حجم السطح الناقصي}}{\text{حجم الكرة}} \Longrightarrow \text{حجم السطح الناقصي} = \frac{\pi ac}{\pi b^2} \times \frac{4}{3}\pi b^3 \Longrightarrow \text{حجم السطح الناقصي} = \frac{4}{3}\pi abc$$

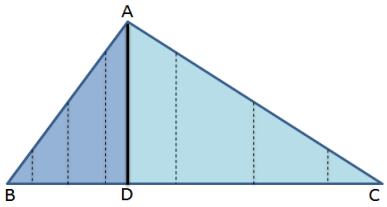
من الملاحظ لحد الآن أن طريقة كافاليري تسمح بالحصول على نتائج متوافقة مع الواقع في بعض الحالات، ولكن مع ذلك تم انتقادها بشدة بسبب عدم دقتها.

5. نقص في الدقة والصرامة

تتعلق العديد من هذه الانتقادات بحقيقة عدم تعريف الأشياء "غير القابلة للتجزئة" بشكل واضح. وقد كان السويسري بول جولدين Paul Guldin (1577-1642) أكثر المنتقدين شدة، حتى أنه ضرب مثالًا مضادا يوضح من خلاله أن طريقة كافاليري تعطي في بعض الأحيان نتائج خاطئة. بالفعل، لقد برهن بول جولدين، بمثال مضاد، أن

طريقة كافاليري للأشياء "غير القابلة للتجزئة" تسمح باستنتاج قضايا خاطئة. مثلا، في مثلث ABC تختلف أطوال جوانبه AB وAC، مقسّم بواسطة ارتفاعه AD إلى مثلثين يفترض، اعتمادا على طريقة كافاليري، أن يكونا متساويي المساحة، وهو ما ليس كذلك في الواقع.

بول جولدين



بعد الانتقادات الكثيرة التي واجهتها طريقة كافاليري، حاول كافاليري إعادة صياغة عرضه للرد على الاعتراضات ولكنه لم ينجح في ذلك.

على الرغم من هذا الجدل وشدة الانتقادات التي تعرضت إليها الطريقة وعدم وجود أُسُس صلبة للنتائج التي تم الحصول عليها، فإن العديد من الرياضياتيين استخدم طرقًا مكافئة لطريقة كافاليري، مثل روبرفال Roberval وتوريتشيللي Torricelli وفيرما Fermat وباسكال Pascal وسانت فينسنت Saint-Vincent و إسحاق بارو Isaac Barrow.

روبرفال

فيرما

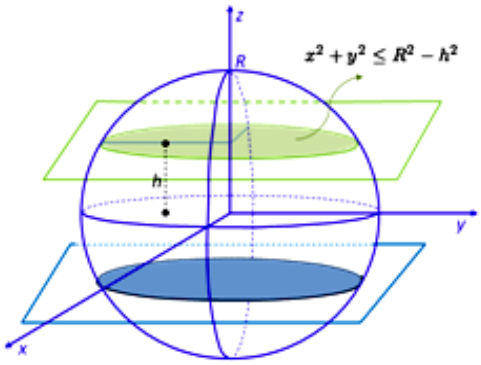
باسكال

سانت فينسنت

إسحاق بارو

6. حجم وسطح الكرة: رؤية استريومترية

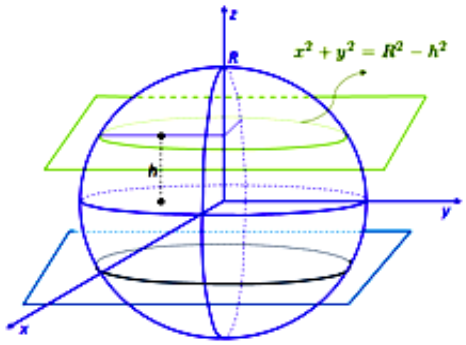
رأى كافاليري الكرة على أنها كومة من الأوراق الدائرية واعتبر أن هذه الكومة تشغل حجم الكرة.



بالكتابة الحديثة، تُكتب فرضية كافاليري كما يلي:

$$\begin{aligned} V_S &= 2\left(\int_0^R \pi\left(R^2-h^2\right)dh\right) \\ &= 2\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right) \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

بأسلوب المقارنة، نعتبر غلاف الكرة على أنه كومة من محيطات الأوراق الدائرية. وبشكل أساسي، تشغل هذه الكومة مساحة الكرة.



بالكتابة الحديثة، من المفترض حسب طريقة كافاليري، أن تكون مساحة الكرة كالتالي:

$$A_S = 2\int_0^R \left(2\pi\sqrt{R^2-h^2}\right)\,dh$$

حيث

$$h = R\sin\theta$$

ومنه

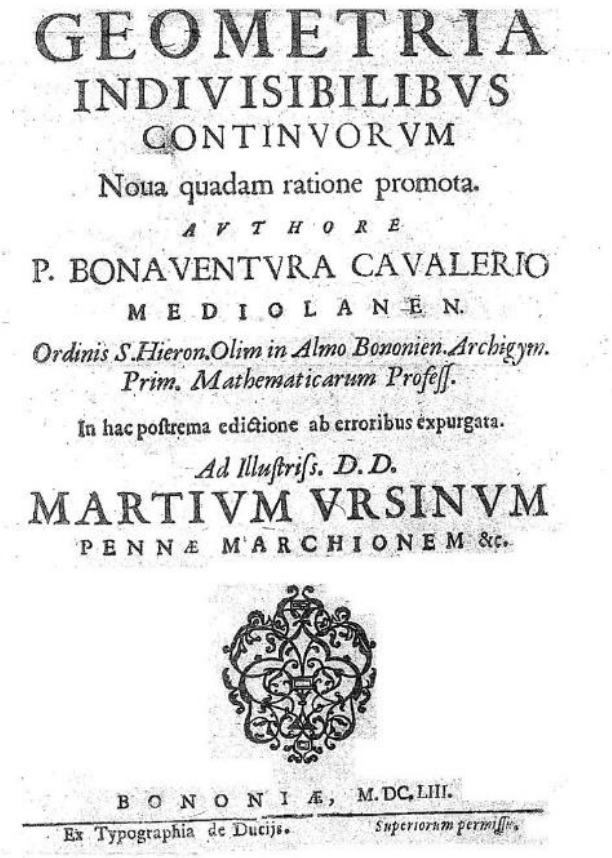
$$
\begin{aligned}
A_S &= 4\pi R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \; d\theta \\
&= \frac{4\pi R^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta) \; d\theta \\
&= \pi^2 R^2 \boxed{< 4\pi R^2} \; !?
\end{aligned}
$$

الخلاصة

لتأكيد صحة طريقة ما، يجب القيام بتفكيكها بدقة انطلاقا من أسس صارمة. فأي طريقة تقوم على أساس استقرائي، أي تقتصر في أحكامها على تراكم حالات خاصة تبيّن أنها صحيحة، لا يمكن ضمان موثوقيتها في الحالات التي لم تتم معالجتها بعد. وهذا يمكن أن يشير إلى طرح فكرة البرهان بطريقة المقارنة.

مرجع

Cavalieri, Bonaventura. Geometria Indivisibilibus Continuorum Noua Quadam Ratione Promota. Ex typographia de Ducijs, 1653.



GEOMETRIA
INDIVISIBILIBVS
CONTINVORVM
Noua quadam ratione promota.
AVTHORE
P. BONAVENTVRA CAVALERIO
MEDIOLANEN.
Ordinis S. Hieron. Olim in Almo Bononien. Archigym.
Prim. Mathematicarum Profeſſ.
In hac poſtrema editione ab erroribus expurgata.
Ad Illuſtriſs. D. D.
MARTIVM VRSINVM
PENNÆ MARCHIONEM &c.

BONONIÆ, M.DC.LIII.
Ex Typographia de Ducijs. Superiorum permiſſu.