الفيزياء والهندسة: الفيزياء كالهندسة والهندسة كالفيزياء

الجزء الأول: مبادئ الميكانيكا الكلاسيكية

ناجي هرماس
أستاذ بقسم الرياضيات، جامعة زيان عاشور، الجلفة
nadjihermas@gmail.com

هذا المقال مُهدى إلى الأستاذ القدير محند موساوي الذي تغرَّب، وإلى ذكرى الأستاذ يوسف عتيق، رحمه الله، المترعة بالخير والعطاء.

1. مقدمة

في حدود عام 1602 تمكّن يوهانس كبلر Johannes Kepler، مستندًا إلى ملاحظات أستاذه تايخو براهي Tycho Brahe الرصدية، من صياغة قوانينه الفلكية الثلاثة الشهيرة، والتي نظر إليها كقوانين رصدية ميدانية ناتجة عن مُراقبات مباشرة للسماء لفترات طويلة.

لاحقًا استطاع نيوتن Newton التحقق من صحة هذه القوانين مستخدمًا القلم والورق وحدهما ومستندًا إلى مسلّمات وقوانين الميكانيكا الكلاسيكية، التي ساهم في وضعها. وقد أطلق هذا النجاح العلمي المذهل الذي حقّقه نيوتن العنان لعمليات بحث فكرية وتجريبية ضخمة وغير مسبوقة في تاريخ الغرب، كانت نتيجتها تأسيس النهضة العلمية الحديثة في الغرب. وعلى هذا الأساس يتفّق جل المؤرخين الغربيين على أنّ نيوتن هو الرجل رقم واحد في حضارتهم المعاصرة. وجعلَ نجاح نيوتن الفلاسفةَ الغربيين ينظرون بعين الدهشة والحيرة الممزوجة بالرهبة إلى الرياضيات القادرة على وصف الأحداث الجارية في الكون، وقالوا من حينها الكثير جدًّا عن سرّ فعاليتها في حل مشكلات العلوم الطبيعية، وعن سر ممارستها من قِبَل الإنسان. ويعطي المرجع [8]، وهو مقال شهير للفيزيائي يوجين بول وينر Eugene Paul Wigner، لمحةً عن طبيعة وتَشعب هذا الموضوع الشائك.

أمّا وجهة نظر علماء الرياضيات إلى علمهم فقد تحدّدت بصورة شبه كاملة منذ نهاية القرن التاسع عشر الميلادي، وتحديدا بعد أن قدَّم كانتور Cantor إلى العالَم نظريته الرائدة في الرياضيات والمسماة "نظرية المجموعات"، والتي اعتبرت من حينها إلى غاية اليوم أساس الرياضيات. وأقرّ الكثير من علماء الرياضيات الكبار، وعلى رأسهم هيلبرت Hilbert، بأنّ الإطار الطبيعي الذي ينبغي أن تُؤسّس داخله الرياضيات المعتادة المستخدمة في حل مشكلات العلوم، والتي تدعى أيضا برياضيات النماذج Models، هو نظرية المجموعات الكانتورية Cantorian set theory، وهو ما تحقق على نحو كامل منذ بداية القرن العشرين. وتكفي لمحة سريعة للتأكد من أنّ جميع النظريات الرياضية المعتادة أو بالأحرى جميع النماذج الرياضية صيغت في عصرنا بلغة نظرية المجموعات $L_1\mathrm{Set}$، وهي لغة رياضية من الرتبة الأولى وتمتلك الأبجدية التالية:

- رموز الروابط المنطقية: $\neg$، $\wedge$، $\vee$، $\Rightarrow$، $\Leftrightarrow$؛
- رمزي المُكَمِّمين الوجودي والعمومي: $\exists$، $\forall$؛

- رمزي القوسين اليميني واليساري: (،)؛
- رمز المساواة: $=$؛
- رمز الانتماء: $\in$؛
- رموز متغيرات أولى: x، y، z، ...؛
- رموز متغيرات ثانية خاصة بالمجموعات: X، Y، Z، ....

وهكذا فكلّ الصيغ التي نجدها في الرياضيات المعتادة هي في جوهرها 'كلمات' أو 'حشود' أو 'نضائد' لهذه الرموز، ويُعثر على الصيغ الصحيحة من بينها بالبرهان الرياضي المستند إلى المبادئ التوتولوجية وإلى المسلمات المنطقية:

- $\mathcal{P}[x \leftarrow t] \Rightarrow (\exists x)\mathcal{P}$؛
- $x = x$؛
- $t = s \Rightarrow (\mathcal{P}[x \leftarrow t] \Leftrightarrow \mathcal{P}[x \leftarrow s])$؛

والمُستخدم لقاعدتي الاستدلال:

$$\frac{\mathcal{P}, \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}}{\mathcal{Q}} \left(\text{Modus ponens قاعدة القياس الاستثنائي}\right),$$

وَ

$$\frac{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{(\exists x)\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}} \left(\text{قاعدة إدخال المُكمِّم الوجودي}\right),$$

حيث لا يظهر المتغير x حرًّا في الصيغة $\mathcal{B}$. ويمكن للقارئ المهتم بهذا الشأن أن ينظر إلى المرجعين [5] وَ[7].

إنها الطبيعة النحوية التي تبنّاها غالبية علماء الرياضيات منذ أكثر من قرن. وإنّ المرء لتستبد به الحيرة والدهشة حين يعلم أنّ كلمات الرياضيات المصاغة بهذه الطريقة البسيطة قادرة على وصف الأحداث الجارية في الكون والتنبؤ بمساراتها بدقة لا حدود لها، ولَيبدو هذا الأمر لغزا حقيقيا من ألغاز الوجود. وفي هذا السياق، هناك وجهة نظر مستندة إلى مبدأ الصورنة Principle of formalism المعلَن عنه من قِبَل هيلبرت وبورباكي Bourbaki: ″الرياضيات هي لغات بشرية غير منطوقة، تتصف طريقة كتابة كلماتها وجملها بقدرات لا محدودة في الاختصار وإعادة التسمية وإدخال الرموز الجديدة″. ويبدو لي بأنّ الله منحنا إمكانيات معينة لاستخدام هذه اللغات الاستثنائية في فهم بعض أسرار الكون الذي نعيش فيه، والله أعلم.

منذ زمن نيوتن إلى غاية بداية القرن العشرين أُسست الرياضيات الواصفة للفيزياء، والتي تشكّلت في مجملها من نظرية المعادلات التفاضلية والصياغتين الهندسيتين الرائعتين للاغرانج Lagrange وهاملتون Hamilton ومن هندسة ريمان Riemann، التي أُوكل إليها مهمة التعبير رياضياتيا عن نظرية النسبية العامة لأينشتاين Einstein. وهكذا أصبحنا ننظر إلى قوانين الفيزياء عبر الهندسة، فبدت لنا الفيزياء كالهندسة. بَيد أنّ سيدة من هذا العالَم اكتشفت ذات لحظة أنّ العكس أيضا صحيح، فالمبادئ والقوانين الفيزيائية ذات أصول هندسية، وأنّ ما يفعله الفيزيائيون هو أنهم ينظرون إلى الهندسة عبر الفيزياء، ومن ثمة تبدو لهم الأولى كالأخرى.

إيمي أمالي نويثر Emmy Amalie Noether (1882-1935) هي سيدة ألمانية من أصول يهودية ساهمت في عشرينيات القرن العشرين مع كل من إميل أرتين Emil Artin وهيلموت هاس Helmut Hasse ولفجانج كرول Wolfgang Krull وأوتو شراير Otto Schreier وبارتيل ليندرت فان دير ويردين Bartel Leendert van der Waerden في ملحمة تأسيس الجبر المجرّد الحديث، والذي يُعدّ أهم منجزات المدرسة الألمانية للرياضيات في العصر الحالي. اعتبرت نويثر أيقونة في الرياضيات، حيث وصفها أينشتاين ذات لحظة بأنها أهم عبقرية إبداعية في الرياضيات ظهرت منذ أن سُمح رسميا للنساء بمزاولة التعليم العالي. بيد أنّ نويثر واجهت وضعا مأساويا في عام 1933 حين صرفها

النازيون، كونها يهودية، عن العمل في جامعة غوتنغن Göttingen، فرحلت إلى الولايات المتحدة، وتوفيت هناك بعد ذلك بعامين من النشاط الجامعي.

إيمي أمالي نويثر

في عام 1918 قدّمت نويثر مساهمة، في إطار صياغة لاغرانج Lagrangian formalism، للميكانيكا الكلاسيكية، ولديها في هذا الشأن مبرهنة مذهلة تحمل اسمها تؤكد أنّ معظم قوانين الحفظ الخاصة بالجمل الميكانيكية الكلاسيكية ذات منشأ هندسي؛ أي أنها ناتجة عن تناظرات حافظة لدالة لاغرانج، الأمر الذي أنار درب البحث للفيزيائيين، الذين أصبحوا يُقابلون بين قوانين الانحفاظ الفيزيائية وبين التناظرات الهندسية الحافظة لخواص دالة لاغرانج. وحتى في حالات قوانين الانحفاظ القليلة حيث لا يكون التناظر واضحًا، كانوا مع ذلك يعتبرون الحفظ ناتجا عن تناظر خفي.

ساعد مبدأ نويثر الفيزيائيين في صياغة مسلّمات ميكانيكا الكم، واعتبروه لبنةً مهمة جدًّا في بناء الفيزياء المعاصرة. وبذلك ترسخت أكثر فأكثر في الأذهان الفكرة المُحيِّرة القائلة بأنّ القوانين الفيزيائية ناتجة عن البنية الهندسية للكون، والتي وفقها أصبحت الفيزياء تابعة على نحو ما للهندسة.

يهدف هذا المقال الثقافي والتعليمي إلى عرض وإثبات مبرهنة نويثر، ويُعنى الجزء الأول منه بتقديم عرض يسير حول مبادئ الميكانيكا الكلاسيكية.

2. مبادئ الميكانيكا الكلاسيكية

بدأ تأسيس نظرية الميكانيكا الكلاسيكية على يد نيوتن، واستمر إلى بداية القرن العشرين، وبذلك تعتبر النظرية الفيزيائية الأطول عمرًا من بين جميع النظريات الفيزيائية الحديثة. ولها مبادئ مُحدَّدَة يعرفها جيدا الفيزيائيون المحترفون.

أ. مبدأ النسبية الكلاسيكي

تُعْنى نظرية النسبية الفيزيائية، وهي غير نظرية النسبية العامة لأينشتاين، بدراسة وتحديد: المَعالم Frames التي تُصاغ فيها القوانين الفيزيائية، التحويلات النقطية في المكان والزمن المستخدمة للانتقال من معلم إلى آخر، شكل وطبيعة القوانين الفيزيائية في كل مَعلَم، صيغ التحويل للمقادير الفيزيائية (الظاهرة في القوانين الفيزيائية)، والتي تلاحظ بُعَيْدَ الانتقال من معلم إلى آخر.

لقد تم وضع عدّة مسلّمات ومبادئ من أجل أن يتحقق مبدأ النسبية الكلاسيكي:

- المعالم المستخدمة في صياغة القوانين الفيزيائية هي المعالم العطالية Inertial frames لجاليليو Galileo؛
- التحويلات النقطية المستخدمة في الانتقال من معلم عطالي إلى آخر هي تحويلات جاليليو؛
- القوانين الميكانيكية المعتمدة هي قوانين نيوتن؛
- الكتل والقوى وقوانينها هي مقادير فيزيائية موضوعية، ولا تتعلق بالمعالم العطالية.

ب. مبدأ الزمن والمكان المطلقين

المكان الفيزيائي متجانسٌ ومتشابهٌ في جميع أنحائه، وقابلٌ للوصف بواسطة فراغ الإحداثيات الحقيقية ثلاثي البعد $\mathbb{R}^3$ المزود بالجداء السُلّمي المعتاد

$$dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

ولأنّ الهندسة الإقليدية لـ$\mathbb{R}^3$ تنبع بكاملها من هذا الجداء، فإننا نستخلص سريعا أنّ هندسة المكان هي الأخرى إقليدية، ولا متغيرة عبر الزمن، ولذلك يوصف المكان في إطار الميكانيكا الكلاسيكية بأنّه مطلقٌ في طبيعته وهيئته.

من ناحية أخرى، كل الساعات الممكن تصور وجودها في الكون تقيس زمنًا واحدًا متجانسًا، ذا طبيعة ثابتة، وقابلًا للوصف بواسطة إحداثية تنتمي إلى المجموعة $[0, +\infty[$ المزوّدة بالمسافة الإقليدية. علمًا أن قياسات أية ساعة لا تتعلق بموقعها ولا بحركتها.

وهكذا يمتلك الكون الفيزيائي الممثل في "المكان + الزمن" وفقًا لهذا المبدأ أربعة أبعاد حقيقية: ثلاثة مكانية وواحدٌ زمني. كما يمكن مطابقته بالمجموعة $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$ المزوّدة بالمترية Metric

$$dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

يُستخلص من المبدأ السابق أنّ اختلافات قياسات الساعات الموضوعة في الكون للزمن المستغرق من قبل أية حادثة كونية لا تنبع إلا من اختلاف وحدات القياس المستعملة وبدايات الزمن المختارة. وهكذا فإذا كانت t_1 هي نتيجة قياس ساعة أولى وt_2 نتيجة قياس ساعة ثانية للزمن الذي استغرقته حادثة كونية معينة، فإنه لدينا حتما العلاقة التآلفية

$$t_2 = at_1 + b,$$

حيث a وَb عددان حقيقيان موجبان تماما. ولنلاحظ هنا كيف تنشأ خاصيتا "الخطّية" و"التآلفية" المنتشرتان في الرياضيات من افتراض ليس رياضياتيا مائة بالمائة. وبالنتيجة فإنّ جميع الساعات المتزامنة في الكون، ومهما كانت أوضاعها وسرعات وتسارعات حركاتها، تعطي قياسا واحدا للزمن الذي تستغرقه أية حادثة فيزيائية.

كذلك يسمح لنا مبدأ المكان المطلق بالنظر إلى مسار أية نقطة مادية متحركة في الكون الفيزيائي على أنه منحنٍ مستمر $t \in [0,T[\mapsto P(t) \in \mathbb{R}^3$. وفي حالة قَبِل هذا المنحنى الاشتقاق مرّتين، دُعي العددان $P'(t)$ وَ $P''(t)$ على التوالي بسرعة وتسارع النقطة المادية محطّ المراقبة الفيزيائية. ومن حيث المبدأ يمكن للمُراقب الذي يُعد القياسات حول الحركة أن يستخدم أية ساعة لقياس تدفقات الزمن، وأن يستند إلى أي معلم في الكون لتحديد المسافات والمواقع.

ليكن $\mathcal{R}_1 = \big(O(t); \mathbb{i}(t), \mathbb{j}(t), \mathbb{k}(t)\big)$ أحد هذه المعالم المتحركة، ولتكن $\mathcal{M}(t)$ مصفوفة الانتقال من الأساس المعياري

$(\mathbb{i}, \mathbb{j}, \mathbb{k}) = \big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\big)$،

إلى الأساس $\big(\mathbb{i}(t), \mathbb{j}(t), \mathbb{k}(t)\big)$. لدينا

$$P(t) = x(t)\mathbb{i} + y(t)\mathbb{j} + z(t)\mathbb{k} = O(t) + \hat{x}(t)\mathbb{i}(t) + \hat{y}(t)\mathbb{j}(t) + \hat{z}(t)\mathbb{k}(t).$$

ومنه الصيغة

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o_1(t) \\ o_2(t) \\ o_3(t) \end{pmatrix} + \mathcal{M}(t) \begin{pmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{y}(t) \\ \hat{z}(t) \end{pmatrix},$$

التي تحدد العلاقة الرابطة بين إحداثيات النقطة المادية المتحركة $P(t)$ المحسوبة في المعلمين $\mathcal{R}_0$ وَ $\mathcal{R}_1$. عِلمًا أنّ $\mathcal{R}_0 = \big((0,0,0); \mathbb{i}, \mathbb{j}, \mathbb{k}\big)$ وَ $O(t) = o_1(t)\mathbb{i} + o_2(t)\mathbb{j} + o_3(t)\mathbb{k}$.

إذا افترضنا بأن الأساس $\big(\mathbb{i}(t), \mathbb{j}(t), \mathbb{k}(t)\big)$ متعامد ومتجانس بالنسبة للجداء السلمي المعياري

$$(x, y)_{\mathbb{R}^3} = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3, x = (x^1, x^2, x^3), y = (y^1, y^2, y^3),$$

وهو الخيار المعتمد دائما من قِبل الفيزيائيين، فإنّ المصفوفة $\mathcal{M}(t)$ تصير منتمية إلى زمرة المصفوفات المتعامدة ذات المعاملات الحقيقية $O(3; \mathbb{R})$. وتتميز عناصر هذه الزمرة بأنها تحفظ الجداء السلمي المرافق لأي أساس جبري للفراغ $\mathbb{R}^3$.

توصف حركة نقطة مادية في الكون بأنها منتظمة بالنسبة لمعلم معطى إذا أخذت الشكل التآلفي $at + b$، حيث a وَ b شعاعان ثابتان من الفراغ $\mathbb{R}^3$. النتيجة التالية سهلة الإثبات:

تبقى الحركاتُ المنتظمةُ بالنسبة للمعلم $\mathcal{R}_0$ منتظمةً بالنسبة للمعلم $\mathcal{R}_1$، وبالعكس، إذا، وإذا فقط، كانت حركة النقطة $O(t)$ منتظمة بالنسبة لـ $\mathcal{R}_0$، وكان الأساس $\big(\mathbb{i}(t), \mathbb{j}(t), \mathbb{k}(t)\big)$ ثابتا ولا يتعلق بالزمن.

والشرط الأخير يُعبّر عنه بالقول إنّ المعلم $\mathcal{R}_1$ يتحرك بانتظام بالنسبة للمعلم $\mathcal{R}_0$.

ب. مبدأ التأثير

التأثير الديناميكي على حركة أيّ جسم مادي في الكون يأتي بالضبط من الأجسام المادية المحيطة به. إضافة إلى ذلك يتلاشى التأثير المتبادل بين جسمين ماديين إلى الصفر إذا تناهت المسافة بينهما إلى ما لا نهاية.

لتكن P وَ Q نقطتين ماديتين متحركتين في الكون. يُمثَّل التأثير الديناميكي للنقطة Q على النقطة P بواسطة شعاع $\mathcal{F}(P, Q) \in \mathbb{R}^3$، والذي يسمّيه الفيزيائيون غالبًا بالقوة المؤثرة على P والناجمة عن Q. وإذا كانت تشير Q_1، ...، Q_n إلى جميع النقاط المادية في الكون ذات التأثير الديناميكي على P، فإنّ الشعاع

$$\mathcal{F}(P; Q_1, \dots, Q_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}(P, Q_k),$$

يدعى محصلة القوى المؤثرة على P.

من ناحية ثانية يُعرَّف الجسم المادي المعزول في الكون على أنه جسم بعيد كفاية عن الأجسام المحيطة به إلى درجة يُتَجاهل تأثيرها عليه. وهكذا نستنتج سريعا بأنّ محصلة القوى المؤثرة على أي جسم مادي معزول تساوي 0.

ج. مبدأ القصور الذاتي لجاليليو أو قانون نيوتن الأول للحركة

يُوصف مَعلَمٌ ما في الكون بأنه معلم عطالي إذا كان أيّ جسم مادي معزول في الكون يتحرك على خط مستقيم وبسرعة ثابتة بالنسبة له. ولقد وُضعت الفرضية التالية والمسماة بمبدأ القصور الذاتي لجاليليو:

يوجد على الأقل معلم عطالي واحد في الكون.

وتساعدنا النتيجة التالية على تحديد جميع المعالم العطالية في الكون:

إذا كان $\mathcal{R}$ مَعلَمًا عطاليا معطى، فإنّ المعالم العطالية في الكون هي بالضبط المعالم المتحركة بانتظام بالنسبة لـ $\mathcal{R}$.

لنراقب حركة نقطة مادية P من خلال معلمين عطاليين $\mathcal{R} = (O; \mathbb{i}, \mathbb{j}, \mathbb{k})$ وَ $\hat{\mathcal{R}} = (\hat{O}; \hat{\mathbb{i}}, \hat{\mathbb{j}}, \hat{\mathbb{k}})$. لدينا

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= r(t) = x(t)\mathbb{i} + y(t)\mathbb{j} + z(t)\mathbb{k},\\ \overrightarrow{\hat{O}P} &= \hat{r}(\hat{t}) = \hat{x}(\hat{t})\hat{\mathbb{i}} + \hat{y}(\hat{t})\hat{\mathbb{j}} + \hat{z}(\hat{t})\hat{\mathbb{k}}\\ &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{O\hat{O}} = x(t)\mathbb{i} + y(t)\mathbb{j} + z(t)\mathbb{k} - \alpha t - \beta\\ &= (x(t) - \alpha^1 t - \beta^1)\mathbb{i} + (y(t) - \alpha^2 t - \beta^2)\mathbb{j} + (z(t) - \alpha^3 t - \beta^3)\mathbb{k}.\end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha^1 t + \beta^1\\ \alpha^2 t + \beta^2\\ \alpha^3 t + \beta^3\end{pmatrix} + \mathcal{M}\begin{pmatrix}\hat{x}(\hat{t})\\ \hat{y}(\hat{t})\\ \hat{z}(\hat{t})\end{pmatrix},$$

حيث تشير $\mathcal{M}$ إلى مصفوفة الانتقال من $(\mathbb{i}, \mathbb{j}, \mathbb{k})$ إلى $(\hat{\mathbb{i}}, \hat{\mathbb{j}}, \hat{\mathbb{k}})$. وهكذا في كل لحظتين t وَ $\hat{t}$ مُقاستين بواسطة ساعتين موضوعتين في المعلمين $\mathcal{R}$ وَ $\hat{\mathcal{R}}$، تجسد الصيغة المصفوفاتية الواردة آنفا تحويلا تآلفيا متعامدا للفراغ $\mathbb{R}^3$ في نفسه.

وعموما تشكّل التحويلات التالية في إحداثيات المكان والزمن

$$\begin{cases}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha^1 t + \beta^1\\ \alpha^2 t + \beta^2\\ \alpha^3 t + \beta^3\end{pmatrix} + \mathcal{M}\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{pmatrix};\\ t = a\hat{t} + b,\end{cases}$$

حيث $\mathcal{M} \in O(3; \mathbb{R})$، زمرة جبرية، تدعى زمرة تحويلات جاليليو، وهي زمرة التحويلات النقطية المستخدمة في تغيير الإحداثيات بين المعالم العطالية.

يُثْبِت نجاحُ نيوتن في تبرير قوانين كبلر رياضيا صحةَ المقولات الثلاث التالية:

مركز الشمس هو مبدأ لمعلم عطالي تقريبي جيد، ويمكن تقريب هندسة الكون في أبعاده الفلكية العادية المماثلة لأبعاد المجموعة الشمسية بالهندسة الإقليدية ثلاثية البعد، حيث لا تلعب الأبعاد الإضافية للمكان والزمن أيّ دور فيزيائي، ولا توجد منابع معتبرة للمادة والطاقة الخفيتين بجوار مجموعتنا الشمسية.

د. قانون نيوتن الثاني للحركة ومبدأ الحتمية الميكانيكية

من أجل كل نقطتين ماديتين P وَ Q في الكون، وكل معلم عطالي $\mathcal{R} = (O; \mathbb{i}, \mathbb{j}, \mathbb{k})$ لدينا

$$\mathcal{F}(P, Q) = f\left(r_P(t), r_Q(t), r'_P(t), r'_Q(t)\right),$$

حيث $r_P(t) = \overrightarrow{OP}$ و $r_Q(t) = \overrightarrow{OQ}$، ويمثّل الشعاعان المشتقان $r'_P(t)$ وَ $r'_Q(t)$ سرعتي P وَ Q في اللحظة t بالنسبة للمعلم $\mathcal{R}$. وإذا كانت تشير Q_1، ...، Q_n إلى جميع النقاط المادية في الكون ذات التأثير الديناميكي على P، فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد $0 < m_P$، لا يتعلق إلا بالنقطة P، ويحقق المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية والمسماة معادلة نيوتن

$$\begin{aligned} m_P r''_P(t) &= \mathcal{F}(P; Q_1, \dots, Q_n) \\ &= f\left(r_P(t), r_{Q_1}(t), \dots, r_{Q_n}(t), r'_P(t), r'_{Q_1}(t), \dots, r'_{Q_n}(t)\right). \end{aligned}$$

يدعى العدد m_P بكتلة النقطة المادية P.

يُمثّل ما سبق قانون نيوتن الثاني للحركة، بينما يمكننا صياغة مبدأ الحتمية الميكانيكية على النحو الآتي:

إنّ أوضاع وسرعات النقاط المادية المكوّنة لأيّ نظام ميكانيكي معزول عند لحظة البدء، وهي المسماة بالأوضاع والسرعات الابتدائية، تُحدِّد تماما حركات هذه النقاط.

لتكن P_1، ...، P_n هي جميع النقاط المادية المكونة لنظام فيزيائي معزول. يمكننا استنادا إلى قانون نيوتن الثاني للحركة أن نكتب، في معلم عطالي معطى، المعادلات

$$(\mathcal{S})\quad m_i r''_i(t) = f_i\big(r_1(t), \dots, r_n(t), r'_1(t), \dots, r'_n(t)\big), 1 \le i \le n,$$

حيث تشير m_i إلى كتلة P_i. ويخبرنا مبدأ الحتمية الميكانيكية أنه مهما تكن الأشعة $\mathbb{r}_i$ وَ $\mathbb{r}'_i$، فإنّ نظام المعادلات $(\mathcal{S})$ المزوّد بالشروط الابتدائية

$$r_i(0) = \mathbb{r}_i, r'_i(0) = \mathbb{r}'_i, 1 \le i \le n,$$

يقبل حلا وحيدا. ولِنُشِر بالمناسبة أنه في غالبية حالات النظم الفيزيائية العيانية مثل المجموعات الشمسية تكون الدوال f_i قابلة للاشتقاق، الأمر الذي يثبت تحقق مبدأ الحتمية الميكانيكية رياضياتيا استنادا إلى مبرهنة كوشي-ليبشيتز للوجود والوحدانية.

هـ. مبدأ الفعل وردّ الفعل أو قانون نيوتن الثالث للحركة

من أجل كل نقطتين ماديتين P وَ Q لدينا المساواة $\mathcal{F}(P, Q) = -\mathcal{F}(Q, P)$، وهذا يعني أنّ التأثير الديناميكي لـQ على P يساوي في الطول التأثير الديناميكي لـP على Q، ويعاكسه في الاتجاه.

ونحصل استنادا إلى هذا المبدأ على النتيجة التالية:

من أجل كل جملة نقاط مادية معزولة $\{P_1, \dots, P_n\}$، العلاقات

$$\frac{\|r''_i(t)\|_2}{\|r''_j(t)\|_2} = \frac{m_j}{m_i},$$

محققة في أيّ معلم عطالي $\mathcal{R}$، حيث يشير $\|\cdot\|_2$ إلى النظيم الإقليدي المرافق لـ $\mathcal{R}$.

و. مبدأ الموضوعية

القوى المؤثرة على النقاط المادية في الكون هي مقادير فيزيائية موضوعية، ولا تتعلق بالمعالم العطالية المختارة لإنجاز الحسابات.

وينتج سريعا عن هذا المبدأ ما يلي:

الدوال f_i الظاهرة في جملة المعادلات $(\mathcal{S})$ مرتبطة فقط بالنقاط المعزولة محلّ الدراسة، ولا تتعلق بالمعلم العطالي الذي يستخدمه المراقب الفيزيائي.

ز. مبدأ النسبية لجاليليو

صاغ جاليليو في أوّل الأمر هذا المبدأ كما يلي:

كل مراقبين فيزيائيين عطاليين ينجزان نفس التجارب الميكانيكية يحصلان حتما على نفس النتائج.

وبعد ظهور حساب التفاضل والهندسة التحليلية، تبيّن أنّ هذا المبدأ يكافئ في حقيقة الأمر النص الأكثر قربا من الرياضيات:

كل الصيغ الرياضياتية الواصفة للقوانين الميكانيكية تتمتع بالشكل ذاته في جميع المعالم العطالية.

عِلمًا أنّ المراقب العطالي هو المراقب الفيزيائي الذي يستند خلال إنجازه للحسابات إلى معلم عطالي.

يُتَّبَع في الجزء الثاني.

مراجع للاستزادة

[1] Abraham, R. and Marsden, J. E., Foundations of Mechanics, Addison-Wesley, Redwood City, 1987.

[2] Arnold, V. I., Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer-Verlag, New York, 1989.

[3] Deriglazov, A., Classical Mechanics: Hamiltonian and Lagrangian Formalism, Springer International Publishing Switzerland, 2017.

[4] Godbillon, C., Géométrie différentielle et mécanique analytique, Hermann, Paris, 1969.

[5] Jech, T., Set Theory, The Third Millennium Edition, Revised and Expanded, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1997, 2003.

[6] Marsden, J. E. and Ratiu, T. S., Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems, Springer-Verlag, New York, 1999.

[7] Tourlakis, G., Lectures in Logic and Set Theory, Volume 2: Set Theory, Cambridge University Press, 2003.

[8] Wigner, E. P., The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 13 (1), 1960, 1-14.