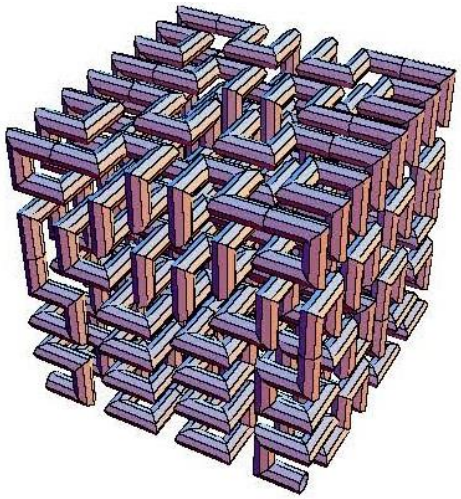
منحنيات الملء

حمزة خليف
أستاذ رياضيات، متقاعد
hkhelif@gmail.com



منحني هيلبرت في $\mathbf{R}^3$

يستعمل النصّ الحروف العربية الإضافية الآتية في كتابة بعض أسماء العَلَم الأعجمية:
پ(p)، ڤ (g)، ڤ (v)، ٻ (é، è، e، ...)، ۆ (œ، eu، e)، و(o)، وُ(ou).

1. منحنيات الملء

كانت الفكرة القائلة إنّ جميع المنحنيات ليس لها سُمْك ومن ثَمّ فإنّ لها مساحةً منعدمةً، وإنّ عدد النقط في قطعة مستقيمة أقلّ من عدد تلك الموجودة داخل مربّع قائم على هذه القطعة، إرثا رياضياتيا مسلّما به منذ الأزل؛ ولكنّ هذه الفكرة استسلمت أخيرًا للروح الحيويّة و"المشكّكة" لبعض علماء الرياضيات. منذ أكثر من قرن، كان هؤلاء الرياضياتيون يتساءلون عن وجود منحنيات تمرّ عبرَ جميع نقط أجزاءَ من $\mathbf{R}^n$ ، $n \geq 2$ ، قياساتها (مساحة، حجم، ...) غير منعدمة، كمربّع الوَحدة $[0,1]^2$ في $\mathbf{R}^2$ أو المكعّب $[0,1]^3$ في $\mathbf{R}^3$ ، على سبيل المثال. بمعنى آخر، كانوا يتساءلون عن وجود منحنيات تملأ هذه الأجزاء ومن ثَمّ فهي مساوية لها، ما يعني ببساطة وجود منحنيات مساحتها غير منعدمة! (1)

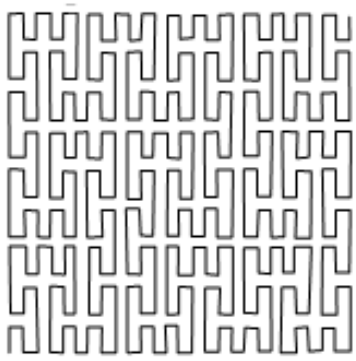
منحنيات مساحتها منعدمة

منحنيات مساحتها أو حجمها غير منعدم

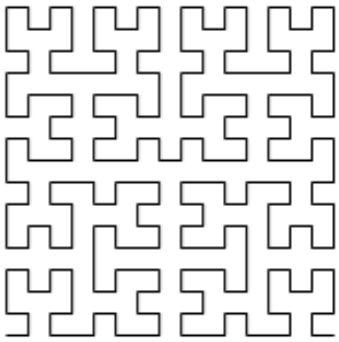
كان جوسبي پيانو (Giuseppe Peano) أوّل من أعطى جوابا إيجابيا عن هذا السؤال من خلال إنشاء أوّل مثال على هذا المنحني في عام 1890. (2)

بعد ذلك أُعطيت أمثلة أخرى من طرف كلٍّ من دَفيد هيلبرت (David Hilbert) في عام 1891، وإيلَياكيم هاستينڤس مور (Eliakim Hastings Moore) في عام 1900، وهَنري لوّبڤ (Henri-Léon Lebesgue) في عام 1904، وڤاتسواف شيرپينسكي (Waclaw Sierpinski) في عام 1912، وجورج پوليا (George Pólya) في عام 1913، إلخ. منذ ذلك الحين يسمّي الرياضياتيون المنحنيات المعرّفة بطرق تكرارية، والتي تتمتّع بهذه الخاصية، منحنيات الملء، المنحنيات المالئة، أو أيضا منحنيات پيانو.

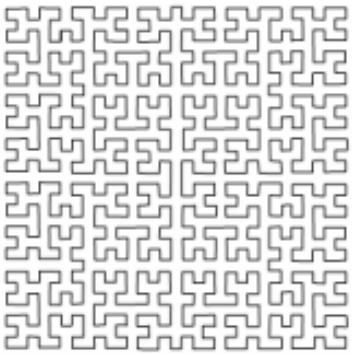
توضّح الأشكال من 1 إلى 6 الآتية، على التتابع، منحنياتٍ تقريبيةً لهذه المنحنيات الستّة. (3)



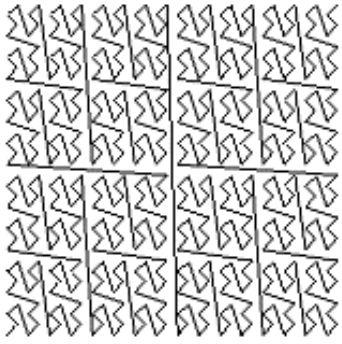
الشكل 1



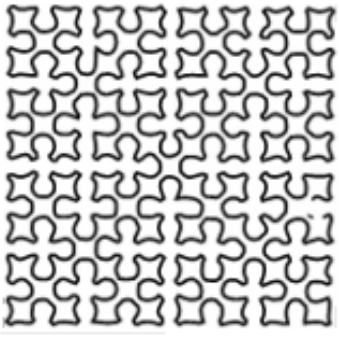
الشكل 2



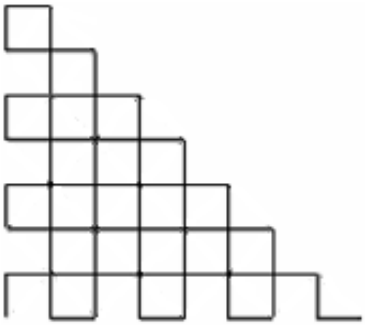
الشكل 3



الشكل 4



الشكل 5



الشكل 6

يمكن تعميم هذه الإنشاءات بسهولة في البعد 3. (4)

2. البعد الكُسوريّ

لم يعد الاهتمام بالبعد الطوبولوجيّ لهذه المنحنيات قائما ولكن انتقل إلى البعد الكُسوريّ (المُدرج من طرف بوّنوا ماندبلبرو (Benoît Mandelbrot) الذي فتح مَهيَعا من الطرق نحو الهندسة الكُسورية)

$$d = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\ln N_\varepsilon}{-\ln \varepsilon} \right)$$

حيث N_ε هو الحدّ الأدنى لعدد الكرات التي يبلغ شعاعها (نصف قطرها) ε والتي تغطّي المنحني.

هذا البعد، المحصور بين 0 و1 (على التوالي 1 و2، 2 و3)، يتوافق مع سعة مجموعة من النقط (على التوالي خط، سطح) لملء خط (على التوالي سطح، حجم) جزئيًا، دون أن ينجح تمامًا، بسبب عدم الحصول على القيمة الصحيحة 1 (على التوالي 2، 3) للبعد الطوبولوجيّ الذي وحدَه يسمح بذلك. على سبيل المثال، البعد الكُسوريّ للمنحنيات المذكورة أعلاه يساوي 2.

نلاحظ أنّ هذه المنحنيات مستمرّة وأنّ لبعضها، كمنحني لوّبيق، مُماسا في كلّ من نقطه تقريبًا. ومع ذلك، يمكن تبيان عدم وجود منحني ملء قابل للمفاضلة في كلّ من نقطه.

من الطبيعيّ جدّا أن نتساءل عن إمكانية تعميم هذه النتائج إلى أجزاء أخرى من $\mathbf{R}^n$.

ربّما تعطي المبرهنة الآتية جوابا عامّا عن تساؤلنا هذا.

مبرهنة مازوركيفيتش (Hahn-Mazurkiewicz)

يمكن لفضاء لـ هاوسدورف (منفصل) غير خال أن يُملأ تماما بمنحن مستمرّ، إذا وفقط إذا كان متراصّا، ومترابطا، ومترابطا محلّيا وقابلا للأمترة (5).

سبق أن أثبت فيليكس هاوسدورف أنّ "كلّ مجموعة متراصّة صورة مستمرّة لمجموعة كانتور". (6)

3. بعض تطبيقات منحنيات الملء

إنّ منحنيات الملء، التي أضحت تشكّل بالفعل جزءًا من الهندسة الكُسورية التي تمّت دراستها بالتفصيل من قبل بوّنوا ماندبلبرو، تواصل جذب اهتمام الرياضياتيين والمعلوماتيين على حدّ سواء؛ ليس بسبب ميزتها المسلّية وبنيتها الترددية الأنيقة فحسب، ولكن أيضا لأنها ظهرت مفيدة في ميادينَ علميةٍ شتّى.

إنها تسمح باختصار "مشكلات القرب" في الأبعاد العليا إلى مشكلة أَحادية البعد (طريقة أليبنور (7)). تسمح الطبيعة التكرارية لهذه المنحنيات (مثل منحني هيلبرت، على وجه الخصوص) باستخدامها للفهرسة الهرمية للمعطيات في أبعاد عليا، ولتخزين المعطيات متعدّدة الأبعاد في قاعدة معطيات واسترجاعها.

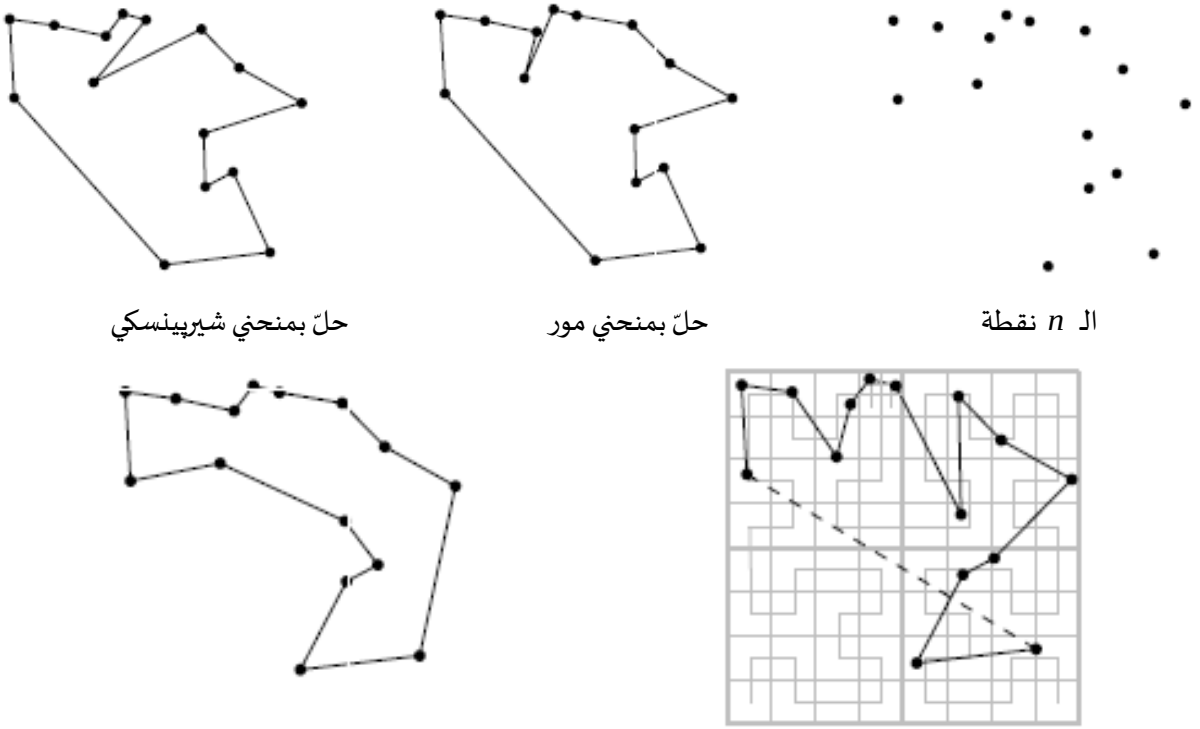
تُستعمَل في الأمثلة التوافيقية، على سبيل المثال، في حلّ مشكلة "البائع المتجوّل" الشهيرة:

لتكن n نقطة (مدينة) من $\mathbf{R}^n$ ولتكن المسافات التي تفصل بين كلّ اثنتين منها. يُطلَب تحديد مسارٍ ذي طول كلّيّ أدنى يمرّ مرة واحدة (بالضبط) بكلّ نقطة ويعود إلى نقطة الانطلاق.

انظروا الشكل 7 حيث يتوفّر حلّ "جيّد" من خلال منحني هيلبرت، والذي يُترجم في لغة نظرية البيانات على النحو الآتي: "العثور على دورة هاميلتونية في بيان تامّ معطى" (بالنسبة إلى التطبيقات في التوافيقيات، انظروا على سبيل المثال هنا وللحصول على شيء من الفنّ الهندسيّ التجريديّ، انظروا هنا.).

تبوّأت هذه المنحنيات مكانتها في أنظمة ضغط الصور، في الهندسة أين تصنع مسارات عشوائية على السطوح، والتي تعطي خلفياتٍ جماليةً لصور معينة (التوْليف أو اللجَب (Dithering) الذي يعني تجاور نقط، ومزج نقط ذات ألوان مختلفة لإنشاء ألوان وسيطة. ووفقا لـ ويكيبيديا: تحويل صورة ذات تدرّج رماديّ إلى أبيض وأسود، بحيث تقارب كثافة

النقط السوداء في الصورة الجديدة متوسّط مستوى الرماديّ في الصورة الأصلية) (انظروا المرجع 2. ص 100-102)، في التصوير الطبّيّ، إلخ.



الـ n نقطة — حلّ بمنحني مور — حلّ بمنحني شيرپينسكي

حلّ بمنحني هيلبرت — المسار الأقصر

الشكل 7

4. المنحنيات الـ α - كثيفة

إذا كانت المنحنيات التي تملأ جزءًا من الفضاء تمرّ بجميع نقط هذا الجزء، فهناك أنواع أخرى من المنحنيات التي لا تتمتّع بهذا الامتياز ولكن مع ذلك يمكنها الاقتراب من كلّ نقطة في هذا الجزء من الفضاء بمسافة أقلّ من عدد موجب ثابت α أو تساويه. نسمّي هذه المنحنيات "المنحنيات الـ α - كثيفة". تُستعمل هذه المنحنيات على نطاق واسع في الأمثلة الشاملة (من بين ما تتمّ دراسته في هذا المجال مشكلة "حقيبة الظهر" ومشكلة "النقل" وغيرهما)، والطبّ الأحيائيّ أو الحيويّ، وما إلى ذلك.

على سبيل المثال، حلزون أرخميدس المعرّف في الإحداثيات القطبية بالمعادلة

$$\rho = a\theta$$

هو πa - كثيف (الشكل 8).

بصورة عامّة،

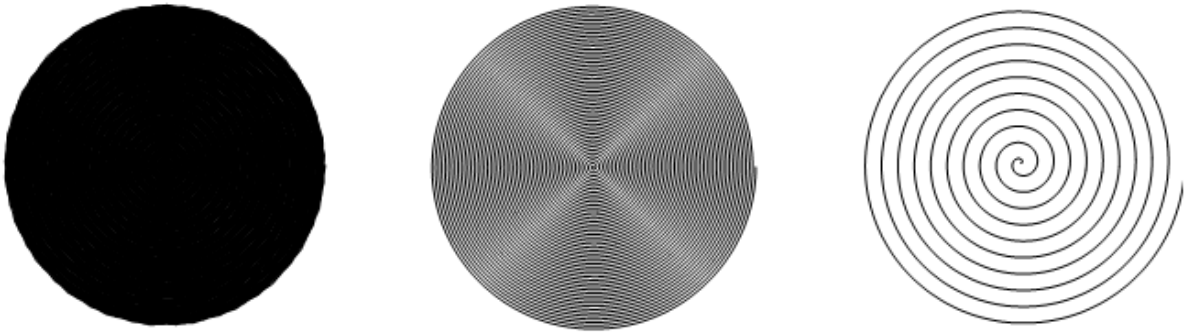
ليكن $\alpha \in \mathbf{R}^+$، α. نقول إنّ فضاء جزئيا A من فضاء متريّ (E,d) - α - كثيف في E إذا تحقّق الآتي

$$\forall m \in E, \exists m' \in A : d(m,m') \le \alpha.$$

يكون المنحن γ - α - كثيفا في فضاء جزئيّ K من $\mathbf{R}^n$ إذا كان γ، كفضاء جزئيّ من K، - α - كثيفا في K، أي إذا كان

$$\forall m \in K, \exists m' \in \gamma : d(m,m') \le \alpha.$$

ينتج من ذلك على الفور أنه إذا كان منحن α - كثيفا في K فإنه β - كثيف في K أيا كان β بحيث يكون $\alpha \ge \beta$.



الشكل 8. منحن $\frac{\pi}{10}$- كثيف في $\mathbf{R}^2$

يمكن إذن اعتبار أيّ منحن يملأ فضاء منحنيا 0- كثيفا في هذا الفضاء، نظرا إلى أنّه في هذه الحالة تنطبق كلّ نقطة من هذا الفضاء الحاضن على نقطة من المنحني.

بعد هذه النظرة العامة الموجزة على منحنيات الملء والمنحنيات الـ α- كثيفة، وإذا سمحنا لأنفسنا أن نتوغّل أكثر في هذه "الغابة الكثيفة" من المنحنيات، يمكننا أن نشير إلى مجموعة أخرى من المنحنيات، ربّما تكون أقلّ أهمية من المنحنيات السابقة، لكنها مع ذلك ليست خالية من الجمال والفائدة؛ هذه هي المنحنيات الـ α- كثيفة أيّا كان العدد الموجب α (كون ذلك مستقلا عن α يستدعي التخلّص من هذا الأخير)، أيْ المنحنيات الكثيفة، التي سمّيتها في كلٍّ من المرجعين 2 و 3 منحنيات الملء الضعيف (لا أعرف ما إذا كان هذا المصطلح موجودا بالفعل من قبل أم لا).

نتّفق إذن على أنّ منحنيا يملأ بشكل ضعيف جزءًا من فضاء ما، هو منحن موجودٌ تقريبًا أينما كان في هذا الجزء، حيث يمكنه الاقتراب من كل نقطة من نقطه بقدر ما نريد. (في الحياة اليومية، الملء نسبيّ تماما. على سبيل المثال، يمكن أن تستوعب علبة "مملوءة" بالحصى بحجم معيّن مزيدا من الحصى من حجم أصغر، أو من الرمل، أو من الماء، وما إلى ذلك.)

أمثلة

نقدّم فيما يأتي نماذجَ لهذه المنحنيات معرّفةً بتمثيلات وسيطية بسيطة.

1. المنحنيات المعرّفة في المستوي بالمعادلتين الوسيطيتين

$$x = a\cos\alpha t,\ y = b\sin\beta t$$

حيث a و b موجبان و $\frac{\alpha}{\beta}\notin\mathbf{Q}$ (نقول إنّ α و β $\mathbf{Q}$ - مستقلّان) تملأ بصورة ضعيفة المستطيل $[-a,a]\times[-b,b]$.

على سبيل المثال، المنحني المعرّف بـ

$$x = \cos\sqrt{2}t, y = \sin t$$

كثيف في المربّع $[-1,1]^2$ وهو إذن يملأ هذا المربّع بطريقة ضعيفة (المنحني لا يشمل مثلا مركز المربّع). (الشكل 9)

2. يمثّل الشكل 10 المكعّب $[-1,1]^3$ مملوءا بصورة ضعيفة بواسطة المنحني "الأجنف" المعرّف بالتوسيط

$$x = \cos\sqrt{3}t, y = \cos\sqrt{2}t, z = \sin\pi t.$$

3. كذلك فالمنحنيات المعرّفة في الإحداثيات القطبية بالمعادلة

$$\rho = a + b\cos\alpha\theta$$

حيث a و b موجبان و α غير ناطق، تملأ بصورة ضعيفة الحلْقة الدائرية

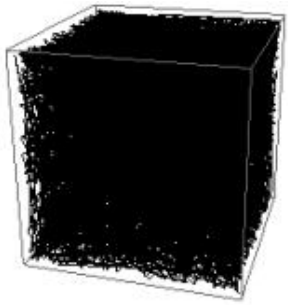
$$|a-b| \le \rho \le a+b\,.$$

على سبيل المثال، المنحني المعرّف بـ

$$\rho = 2+\cos\sqrt{2}\theta$$

يملأ بصورة ضعيفة الحلقة المعرّفة بـ $1 \le \rho \le 3$. (الشكل 11)

الشكل 9



الشكل 10

الشكل 11

التعليقات

1. في عام 1878، أثبت جورج كانتور (Georg Cantor) أنّ لمنوّعتين تفاضليتين (أو قابلتين للمفاضلة أو ملساوَين) ذواتَيْ بعدين منتهيين نفسَ (العدد) الأصليّ بصرف النظر عن هذين البعدين. تستلزم هذه النتيجة، على سبيل المثال، وجود تقابل بين المجال $[0,1]$ و"الفوق مكعّب" $[0,1]^n$ كالمربّع في $\mathbf{R}^2$ والمكعّب في $\mathbf{R}^3$. في عام 1879، أثبت يوجين نيتّو (Eugen Netto) من خلال مبرهنته: "التقابلات المستمرّة بين المنوّعات التفاضلية تحفظ البعد"، أنه لا يوجد تقابل مستمرّ بين منوّعتين تفاضليتين ذواتَي بعدين مختلفين. التقابل الذي أورده كانتور هو إذن بالضرورة منقطع أي غير مستمرّ.

تمّ التخلّص من شرط التقابلية، والسؤال حول وجود منحنيات جوردًا (بتفخيم حرف الدّال) [ʒɔʁdɑ̃] (Camille Jordan) (منحني جوردًا هو صورة تطبيق مستمرّ φ من المجال $[0,1]$ في المستوي بحيث يكون $\varphi(0)=\varphi(1)$ وبحيث يكون اقتصار φ على المجال المفتوح $]0,1[$ متباينا.) احتلّ مكانه. أعطى ويليام فُوق أُسْغُود (William Fogg Osgood) إجابة إيجابية في عام 1903 عندما أنشأ عائلة ذات وسيط، قياس لوبيغ لمنحنياتها غير منعدم والقوس الذي يحدّ العائلة هو منحني بيانو. في عام 1917، أعطى كونراد كنوب (Konrad Theodor Hermann Knopp) عائلة أخرى من المنحنيات قوسها الحادّ هو منحني شيربينسكي (المرجع 5، الصفحتان 1 و 2).

2. "Sur une courbe qui remplit toute une aire plane", Math. Ann., vol. XXXVI, 1890

3. للحصول على تفاصيلَ أوفرَ حول تعريف هذه المنحنيات وخصائصها، عودوا إلى المراجع المذكورة في آخر النصّ.

4. ها هي طريقة (المرجع 3، ص 1245) لإنشاء منحن يملأ متراصًا K من $\mathbf{R}^n$، يُفترض أنه اتحادٌ لـ p متراصًا $K_{1,0}$، $K_{1,1}$، ...، $K_{1,p-1}$ متشابها مع K ومرقّما بحيث يمُسّ كلّ متراصّ المتراصّ الذي يليه.

نقسّم بعد ذلك كلًّا من هذه المتراصّات إلى p متراصًا متشابها دائما مع K، الأمر الذي يُعطي p^2 متراصًا $K_{2,0}$، $K_{2,1}$، ...، K_{2,p^2-1} مرقّما بحيث تغطّي الـ p متراصًا الأولى $K_{1,0}$ وتغطّي الـ p متراصًا التي تلي هذه $K_{1,1}$، وهكذا ...، وتغطّي الـ p متراصًا الأخيرة $K_{1,p-1}$، وبحيث يمُسّ كلّ متراصّ المتراصّ الذي يليه.

إذا واصلنا العمل على هذا المنوال فسنحصل في المرحلة n على متتالية من p^n متراصًا $K_{n,0}$، $K_{n,1}$، ...، K_{n,p^n-1} يلتقي كلّ اثنين متتابعين منها وتغطّي على الترتيب المتراصّات $K_{n-1,0}$، $K_{n-1,1}$، ...، $K_{n-1,p^{n-1}-1}$.

ليكن الآن t عنصرا من المجال $[0,1[$. نضع $K_n(t)=K_{n,[p^n t]}$ حيث يُشير $[p^n t]$ إلى الجزء الصحيح للعدد $p^n t$. بالنسبة إلى t مثبّت، تشكّل الـ $K_n(t)$ متتاليةً من المتراصّات المتداخلة يؤول "حجمها" إلى 0 ويُختصر تقاطعها إذن على نقطة $M(t)=(x_i)_{1\le i\le n}$. المنحني المُوَسَّط $t\mapsto M(t)_{0\le t<1}$ مستمرّ بانتظام ويُمدّد إلى منحن $t\mapsto M(t)_{0\le t\le 1}$ يملأ المتراصّ K.

5. نصطلح على أنّ الأمتَرة هي التزويد بمترية وهي تختلف إذن عن التمتير الذي يعني القياس باستعمال متر.
6. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, third, revised edition of (1914), Translated by J.R. Auman as *Set Theory*, Chelsea, New York, 1962, pp. 154, 226.
7. طريقة أليبنور (Aliénor) تسمح بتحويل مشكلةٍ أمثَلةٍ في $\mathbf{R}^n$ إلى مشكلةٍ أمثَلةٍ أَحادية المتغيّر باستعمال تحويلٍ مُختزِلٍ يَستخدم منحنيا يملأ فضاءً بمعنى الـ α- كثافة. ابتكر هذه الطريقة Yves Cherruault و Arthur Guillez. لمزيد من المعلومات انظروا هنا أو هنا الفصل 9.

المراجع

[1] Cherruault, Y. et Mora, G. Optimisation globale: Théorie des courbes α-denses, Economica, 2005.
[2] Khelif, H. Le jardin des courbes, Dictionnaire raisonné des courbes planes célèbres et remarquables, 2e édition, 966 pages, KDP Amazon, 2020.
[3] Khelif, H. Le jardin des surfaces, Dictionnaire raisonné des courbes gauches, des surfaces et d'autres variétés célèbres et remarquables, 2048 pages, KDP Amazon, 2020.
[4] Peitgen, H.-O., Jürgens, H. and Saupe, D. Chaos and Fractals: New Frontiers of Science, Springer, 2004.
[5] Sagan, H. Space-Filling Curves, Springer-Verlag, 1994.
[6] http://teachout1.net/village/fill.html