نماذج حول بعض الظواهر المثيرة في عالم الأعداد

محمد بوضياف
أستاذ بقسم الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة، القبة

تدلّ عدّة شواهد مادية على أنّ استخدام الأعداد يعود إلى حوالي 3400 سنة قبل الميلاد ببلاد الرافدين. وقد جاء ظهورها، حسب كثير من المصادر التاريخية، في سياق بحث إنسان الحضارات القديمة عن أدوات للعدّ والقياس لتلبية بعض احتياجاته الحياتية كعدّ ممتلكاته، والقيام ببعض الحسابات المتعلّقة بأعماله التجارية والفلاحية كقياس بعض المقادير مثل الأطوال والمساحات، وكذا القيام ببعض التقديرات أو التوقّعات التي تخصّ حدوث بعض الظواهر الطبيعية والأحداث الفلكية. ولأنّ الإنسان بطبعه توّاق للمعرفة، شغوف بالابتكار، لم يتوقّف عند استخدام الأعداد كأداة للعدّ والقياس فحسب، بل راح يتّخذ منها موضوعًا للدراسة والبحث، حيث انخرط في هذا المسعى كثير من الفلاسفة والمفكّرين.

تركّز الاهتمام في البدايات على وضع رموز للأعداد وبناء أنظمة للعدّ وابتكار بعض التقنيات لإجراء العمليات الحسابية المختلفة على بعض الأصناف من الأعداد، وكذا حلّ بعض الأنماط من المعادلات. وشيئا فشيئا، أخذ التعامل مع الأعداد ككائنات مجرّدة يأخذ اهتماما متزايدا من قبل رياضياتي مختلف الحضارات المتعاقبة، حيث تمّ تصنيفها وفقًا لبعض الخصائص المميّزة، ودراسة علاقاتها فيما بينها، وما يمكن تشكيله بواسطتها من بُنًى أو كيانات رياضياتية ضمن ما يُعرف في وقتنا الرّاهن بنظرية الأعداد.

ورغم ما توصّل إليه الأسلاف، عبر مختلف العصور، من نتائج مبهرة في عالم الأعداد منذ يثاغورس، ما يزال هذا العالَم يحتفظ بكثير من أسراره، ما يجعله يستهوي كثيرا من الباحثين والمدرّسين وحتى بعض الفضوليين خاصّة المولعين منهم بإبراز متعة وجمال الرياضيات. وهو ما يعنينا في هذا المقال، حيث سنحاول تقديم بعض النماذج عن هذا الجانب.

1. ثابت كابريكار أو العدد الجوهري 6174

كان كابريكار Kaprekar (1905-1988) معلّم رياضيات بإحدى القرى الهندية. وقد ذاع صيته لدى علماء الرياضيات داخل الهند وحتى خارجها بما كان يقترحه على تلامذته من ألعابٍ تتعلّق بالأعداد، تثير دهشة العقول وتستدعي التدبّر والبحث؛ مما جعله يحظى بدعوات لتقديم إسهاماته في العديد من مؤتمرات الرياضيات.

في مؤتمر للرياضيات، عقد بمدينة مادراس الهندية عام 1949، عرض كابريكار على المشاركين لعبة تتمثّل في الخوارزمية التالية:

1- اختر عددا مؤلّفا من أربعة أرقام بحيث يكون اثنان على الأقلّ منها مختلفين.
2- احسب الفرق بين أكبر وأصغر عددين يمكن تشكيلهما بواسطة أرقام العدد المختار.
3- إذا كان العدد الناتج عن الفرق يستجيب لشرط الخطوة الأولى، أَعِد الخطوة الثانية باستخدام أرقام هذا العدد.
4- كرّر الإجراء السّابق مع ناتج كلّ فرق يستجيب لشرط الخطوة الأولى. ماذا تلاحظ؟

دعنا نجرّب ونكتشف معا. لنأخذ مثلا العدد 2023.

أكبر وأصغر عددين يمكن تشكيلهما بواسطة أرقام هذا العدد هما3220 و0223 على التوالي. ولدينا:

3220-0223=2997
9972-2799=7173
7731-1377=6354
6543-3456=3087
8730-0378=8352
8532-2358=6174
7641-1467=6174

لاحظ أنّه ابتداء من الخطوة السّادسة يكون ناتج الفرق في هذه الخوارزمية ثابتا ويساوي 6174 بالضبط.

ملاحظات

- عادة ما يتمّ عرض الأعداد المستخدمة في خوارزمية كابريكار حسب تسلسل ظهورها بدءًا بالعدد المختار. على سبيل المثال، سلسلة الأعداد المولّدة بالعدد 2023 هي:

2023, 2997, 7173, 6354, 3087, 8352, 6174, 6174, …

- إذا كان عدد أرقام أحد نواتج الفروق أقلّ من أربعة نكمل عدد أرقامه بوضع أصفار عن يساره. على سبيل المثال، إذا اخترنا في البداية العدد 1211 نجد:

2111-1112=0999 ; 9990-0999=8991 ; 9981-1899=8082 ;
8820-0288=8532 ; 8532-2358=6174.

سلسلة الأعداد المولّدة بالعدد 1211 هي:

1211, 0999, 8991, 8082, 8532, 6174, …

- ليكن n عددا طبيعيا مؤلّفا من أربعة أرقام a، b، c، d، بحيث اثنان على الأقلّ منها مختلفان. إذا افترضنا $a \le b \le c \le d$ فإنّه يمكن نمذجة خوارزمية كابريكار كالآتي:

$$K(n) = dcba - abcd = n_1, K^2(n) = K\big(K(n)\big) = K(n_1) = n_2, \dots$$

عندئذ، سلسلة الأعداد المولّدة بالعدد n هي:

$$n, n_1, n_2, \dots$$

على سبيل المثال، من أجل العدد 1211 لدينا:

$$K(1211) = 2111 - 1112 = 0999\ ;\ K^2(1211) = K\big(K(1211)\big) = K(0999) = 8991.$$

- إذا تخلّينا عن شرط تمايز الأرقام وتجاهلنا الأصفار عن يسار الأعداد (الأصفار غير المعنوية) فإنّ سلسلة الأعداد التي تتولّد عن خوارزمية كابريكار يمكن أن تستقر عند ثابت معدوم.

المذهل في الأمر، هو ادّعاء كابريكار، أمام الحضور في الملتقى المذكور آنفا، بأنّه مهما كان العدد الذي يُختار في البداية، بحيث يستجيب للشرط المذكور في الخطوة الأولى من الخوارزمية، فإنّه بعد إجراء بعض الخطوات من هذه الخوارزمية يتمّ حتما الحصول على العدد الثابت 6174.

يوصف هذا العدد بثابت كابريكار أو كذلك بالعدد السحري لخوارزمية كابريكار. لكنّني شخصيا أفضّل الوصف الأوّل، كما يمكن وصفه أيضا بالعدد الجوهري تثمينا لما يختبئ وراءه من أسرار نفيسة.

أثار هذا الادّعاء دهشة الحضور فراحوا يبحثون عن مثال مضاد لكن دون جدوى، مما جعل بعضهم يتّخذ من خوارزمية كابريكار موضوعا للبحث. وقد ازداد القوم ذهولا ودهشة حينما تمّ إثبات صحّة ما ذهب إليه كابريكار، بل أكثر من ذلك، فقد تمّ إثبات أنّ العدد 6174 يظهر بعد ثماني خطوات على الأكثر من تطبيق الخوارزمية. بمعنى، أنّه إذا لم تحصل على هذا العدد إلى غاية الخطوة الثامنة فاعلم بأنّك ارتكبت خطأ ما في حساباتك وعليك أن تحاول من جديد.

عزيزي القارئ، وأنت تتلو هذه السطور، دون شك، يختلج في نفسك تساؤلٌ عمّا إذا كانت هنالك أعداد جوهرية أخرى مثل العدد 6174، مؤلّفة من خمسة أرقام أو أكثر من ذلك أو أقلّ، وربّما تحضر ورقة وقلمًا وتشرع في التجريب أو ربّما تعتزم القيام بذلك فور انتهائك من قراءة هذا المقال. لا داعي للمغامرة والتورّط في متاهات الحسابات، ولتطمئن فقد ناب عنك وعنّي من هم أجرؤُ وأقدرُ على تحمّل ما يتطلّبه خوض مثل هذه المغامرات من وقت وجهد حيث تمّت دراسة خوارزمية كابريكار ليس في نظام التمثيل العشري فحسب، بل في عدّة أنظمة لتمثيل الأعداد. ففي النظام الأكثر تداولا (العشري)، كشفت بعض الدراسات أنّه ينجم عن تطبيق الخوارزمية المذكورة باستخدام أعداد مؤلّفة من رقمين إلى ثمانية أرقام إحدى النتائج التالية:

- وجود عدد جوهري. يتحقّق ذلك في حالتين فقط والعددين الناتجين هما 6174 و495.
- وجود أعداد جوهرية ضمن نطاق محدود من الحالات.
- وجود سلاسل دورية من الأعداد.
- وجود سلاسل دورية من الأعداد ضمن نطاق محدود من الحالات.

يلخّص الجدول الموالي النتائج المتوصّل إليها في الدراسات المذكورة سابقا.

عدد الأرقام	نتيجة تطبيق خوارزمية كابريكار	ملاحظات
2	9, 81, 63, 27, 45, …	سلسلة دورية
3	495	ثابت جوهري
4	6174	ثابت جوهري
5	05355, 59994, … 62964, 71973, 83952, 74943, … 61974, 82962, 75933, 63954, …	سلسلة دورية في 3002 حالة سلسلة دورية في 43219 حالة سلسلة دورية في 43770 حالة
6	420876, 851742, 750843, 840852, 860832, 862632, 642654, … 549945 631764	سلسلة دورية في 841996 حالة ثابت جوهري في 1815 حالة ثابت جوهري في 56180 حالة
7	7509843, 9529641, 8719722, 8649432, 7519743, 8429652, 7619733, 8439552, …	سلسلة دورية
8	63317664 97508421 64308654, 83208762, 86526432, … 43208766, 85317642, 75308643, 84308652, 86308632, 86326632, 64326654, …	ثابت جوهري في 556234 حالة ثابت جوهري في 2041186 حالة سلسلة دورية في 43200472 حالة سلسلة دورية في 44202099 حالة

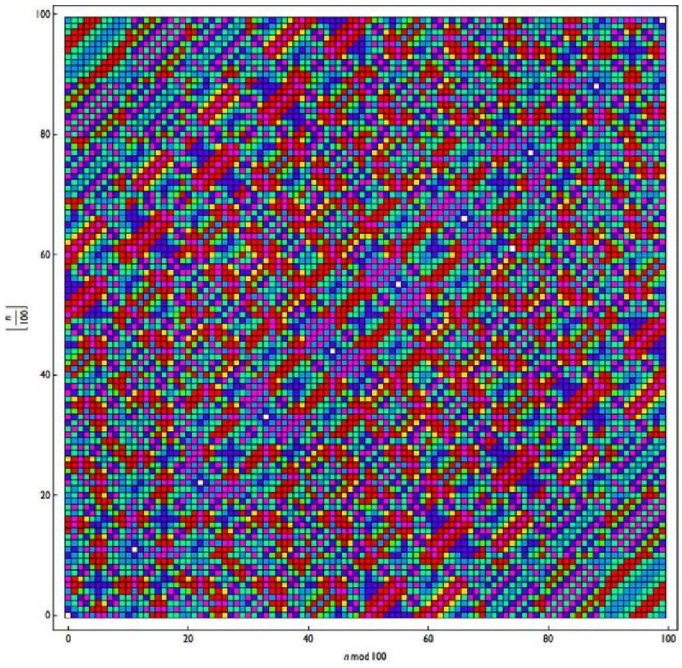
توجد عدّة تطبيقات لخوارزمية كابريكار، خاصّة في الجانبين الترفيهي والجمالي. ولعلّ أبرز هذه التطبيقات برنامج التلوين الذي صمّمه فريق متخصّص بإحدى شركات تكنولوجيا المعلومات بالهند، والذي من شأنه إبراز بعضٍ من جمال الرياضيات ومتعتها للأطفال، مما يساعد في تحبيبها إليهم وتحفيزهم على الانخراط في تعلّمها. يعدّ هذا البرنامج أحد أهمّ الأنشطة المبتكرة التي لا يمكن العثور عليها في كتب الرياضيات المدرسية التقليدية، ويعتمد على تشفير الأرقام

بواسطة ألوان مميّزة ثمّ تطبيق الخوارزمية المذكورة باستخدام لائحة معتبرة من الأعداد الممكن تشكيلها بواسطة أربعة أرقام وفقا لشروط كابريكار.

المفاجأة هو أنّه بعد تصنيف تلك الأعداد في فئات، حسب نفس عدد خطوات الوصول إلى العدد الجوهري 6174، وتنظيمها في جدول تمّ الحصول على لوحة فسيفسائية أخّاذة تسرّ الناظرين. كما تمّ توليد، من تلك اللّوحة، عدّة لوحات فسيفسائية بديعة تأسر العقول هي الأخرى، وذلك من خلال تغيير تشفير الأرقام بواسطة الألوان. وهو ما يعبّر عن أحد جوانب جمال ومتعة الرياضيات التي تختبئ خلف ما يستحق أن يوصف بالعدد الجوهري ألا وهو العدد 6174.

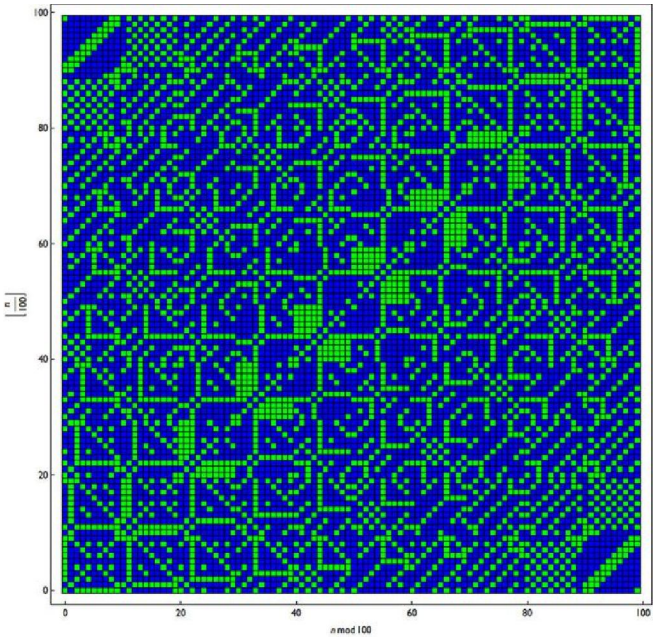
على سبيل المثال، نجم عن التشفير الموالي للأرقام من 0 إلى 7 اللّوحة الفسيفسائية البديعة (1).

0	1	2	3	4	5	6	7



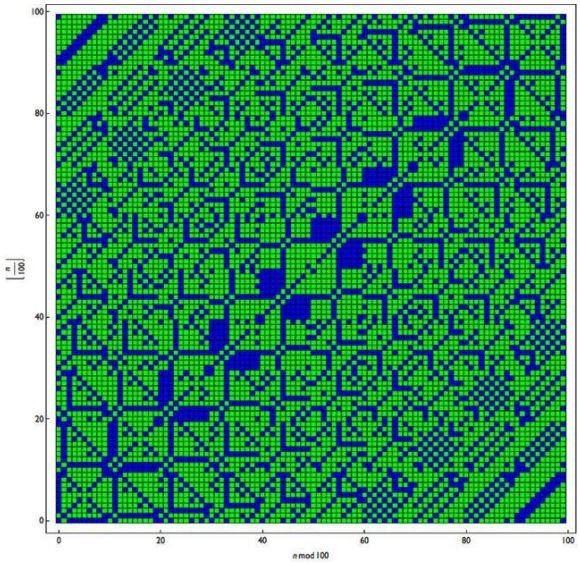
اللّوحة (1)

تمّ توليد لوحة فسيفسائية ثانية لا تقلّ عن الأولى بداعة وسحرا، من خلال تلوين الأرقام الفردية باللّون الأزرق والأرقام الزوجية باللّون الأخضر.



اللّوحة (2)

كما تولّد عن تشفير الأرقام الأولية باللّون الأخضر وبقية الأرقام باللّون الأزرق لوحةٌ فسيفسائية ثالثة لا تقلّ هي الأخرى عن سابقتيها رونقا وجمالا.



اللّوحة (3)

2. من البحث عن مشكل لإبراز جمال الرياضيات إلى مشكل للبحث في الرياضيات

في خمسينيات القرن الماضي، كان بريان ثوايتس Bryan Thwaites (1923-) معلّما للرياضيات بمدينة وينشستر الواقعة جنوب المملكة البريطانية المتّحدة. كان بريان دائم البحث عن الأفكار والأنشطة التي تثير اهتمام طلاّبه بما تبرزه من متعة وجمال للرياضيات، وهو يسعى بذلك إلى تحبيب هذه المادة إليهم وجعلهم ينخرطون في تعلّمها بشكل طوعي. في 21 جوان 1952، اقترح على طلاّبه لعبة لم يكن يدرك أنّها ستتحوّل إلى مشكلة (مخمّنة) أرهقت كل من اهتم بها من الرياضياتيين، بل حتى الحواسيب الفائقة التطوّر عجزت عن تفنيدها.

تتمثّل هذه اللّعبة في اختيار الطلاّب أعدادا طبيعية غير معدومة (صغيرة نسبيا) وملاحظة ما يترتّب عن تطبيق الخوارزمية التالية:

- إذا كان العدد المختار (أو الناتج) زوجيا يُقسَّم على 2.
- وإذا كان العدد المختار (أو الناتج) فرديا يُضرب في 3 ثم يُضاف للنتيجة 1.

أمثلة:

- من أجل العدد 5، تنتج لدينا سلسلة الأعداد التالية:5، 16، 8، 4، 2، 1.
- من أجل العدد 7، نجد:7، 22، 11، 34، 17، 52، 26، 13، 40، 20، 10، 5،16، 8، 4، 2، 1.
- من أجل العدد 42، نجد: 42، 21، 64، 32، 16، 8، 4، 2، 1.

لاحظ جميع الطلاب ظاهرة الانتهاء إلى العدد 1 باستثناء أحدهم اختار العدد 27، ولاحظ أنّ سلسلة النتائج التي تحصّل عليها تأخذ منحى متذبذبا بين صعود ونزول والناتج دوما يفوق العدد 27. وهو ما جعل بريان يعتقد أنّ هذا العدد يضع حدّا للظاهرة التي أثارت انتباه معظم طلاّبه، لكنّه عاد في اليوم الموالي وأخبر طلاّبه أنّ العدد 27 يحقّق بدوره ظاهرة العودة إلى 1 غير أنّ ذلك تطلّب 111 خطوة.

وهنا بدأت جذور تحوّل الظاهرة السابقة إلى مشكلة، حيث دفع الفضول طلاّب بريان إلى تجريب أعداد أخرى ونشرِ اللّعبة في المدارس المجاورة. وشيئا فشيئا عرفت هذه اللعبة شهرة كبيرة وباتت تعرف بمشكلة أو مخمّنة العبارة $3x+1$، والتي يمكن صياغتها على النحو التالي:

من أجل أيّ عدد طبيعي معطى غير معدوم x_1 (ندعوه بذرةً)، سلسلةُ الأعداد الطبيعية x_n المولّدة بالكيفية التالية

$$\begin{cases} x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2} \;;x_n=2p \\ x_{n+1}=3x_n+1 \;;x_n=2p+1 \end{cases}$$

تدركُ الواحد، أي توجد رتبة N بحيث $x_N=1$.

استقطبت هذه المخمّنة اهتمام كثير من الباحثين الرياضياتيين، حيث تمّ إحصاء أزيد من 300 ورقة عمل بشأنها ما بين 1960 و2010، نذكر منها على وجه الخصوص:

- اعتكاف فريق من الرياضياتيين اليابانيين سنة 1960 على بحثها لمدة شهر كامل دون جدوى.
- تنظيم مؤتمر في ألمانيا عام1999 مدّته يومين لدراسة هذه الظاهرة دون التوصل إلى نتيجة.
- إقحام الحواسيب الفائقة التطوّر خلال العقدين الأخيرين دون الحصول على مثال مضاد. فعلى سبيل المثال، في2011 تمّ تجريب قيم حتى الرتبة $5{,}76\times10^{18}$.

ملاحظة

يوجد جدل كبير حول ظهور مخمّنة العبارة $3x+1$، فهنالك من يزعم أنّها كانت متداولة في عشرينيات القرن الماضي، وهنالك من ينسبها إلى الرياضياتي الألماني لوثار كولاتزLothar Collatz (1910-1990)، الذي يذكر أنه اكتشفها في 1937، ويدّعي أنّها لم تشتهر بين الرياضياتيين إلا بعد عرضها شفويا من قبل هذا الأخير في المؤتمر الدولي لعلماء الرياضيات في كامبريدج بالولايات المتحدة (1950). كما تُعرف في الأدبيات بعدّة أسماء: مخمّنة كولاتز، مخمّنة ثوايتس،مخمنة سرقوسة Syracuse،خوارزمية هاس نسبة إلى الرياضياتي الألماني هيلموت هاسHelmut Hasse (1898-1979)، مشكلة كاكوتاني نسبة إلى الرياضياتي الياباني شيزو كاكوتاني Shizuo Kakutani (1911-2004).

بغضّ النظر عن الخلاف التاريخي القائم حول ميلاد مخمّنة كولاتز، ما تزال هذه المخمنة صامدة إلى اليوم منذ ما يناهز قرنا من الزمن، مجسدة إحدى روائع صور جمال الرياضيات وإبداع العقل البشري في هذا الوجود، الذي يدل بدوره على عظمة الخالق.

3. مجاميع جبرية مدهشة

1- إليك المجموع الجبري التالي:

$$A_1 = 123789^2 + 561945^2 + 642864^2 - 242868^2 - 761943^2 - 323787^2.$$

أ- تحقّق أنّ $A_1 = 0$.

ب- قم بالإجراءات التالية وراقب النتائج:

✓ احذف الرّقم الأول من اليسار في كلّ حدّ من حدود A_1 ثمّ احسب مجدّدا المجموع الناتج.

✓ كرّر نفس الإجراء (الحذف من اليسار إلى اليمين) إلى غاية الإبقاء على أرقام الآحاد فقط.

ج- قم بنفس الإجراء السّابق لكن مع تغيير اتجاه الحذف (أي من اليمين إلى اليسار).

د- جرّب إجراءً مماثلا لكن هذه المرّة بالحذف في الاتجاهين معا (رقم من اليسار وآخر من اليمين).

2- قارن ما تحصّلت عليه بالنتائج التالية:

$$A_1 = 123789^2 + 561945^2 + 642864^2 - 242868^2 - 761943^2 - 323787^2 = 0$$
$$A_2 = 23789^2 + 61945^2 + 42864^2 - 42868^2 - 61943^2 - 23787^2 = 0$$
$$A_3 = 3789^2 + 1945^2 + 2864^2 - 2868^2 - 1943^2 - 3787^2 = 0$$
$$A_4 = 789^2 + 945^2 + 864^2 - 868^2 - 943^2 - 787^2 = 0$$
$$A_5 = 89^2 + 45^2 + 64^2 - 68^2 - 43^2 - 87^2 = 0$$
$$A_6 = 9^2 + 5^2 + 4^2 - 8^2 - 3^2 - 7^2 = 0$$

3- هل يمكنك إعطاء تفسير لهذه الظاهرة؟

4. أنماط عددية مدهشة

ماذا بشأن تعميم النتائج التالية؟

$$\begin{cases} 11 \times 111 = 1221 \\ 111 \times 1111 = 123321 \\ 1111 \times 11111 = 12344321 \end{cases} ; \begin{cases} 11^2 = 121 \\ 111^2 = 12321 \\ 1111^2 = 1234321 \end{cases} ; \begin{cases} 67^2 = 4489 \\ 667^2 = 444889 \\ 6667^2 = 44448889 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} 34^2 = 1156 \\ 334^2 = 111556 \\ 3334^2 = 11115556 \end{cases} ;$$

$$\frac{2199997\ 8}{217\ 8} = \frac{6\ 5999934}{6\ 534} = 10101 \; ; \; \frac{21997\ 8}{217\ 8} = \frac{6\ 59934}{6\ 534} = 101 \; ; \; \frac{6\ 534}{217\ 8} = \frac{6\ 5934}{2197\ 8} = \frac{6\ 59934}{21997\ 8} = 3$$

$$\frac{217\ 8217\ 8217\ 8}{217\ 8} = \frac{6\ 5346\ 5346\ 534}{6\ 534} = 100010001 \; ; \; \frac{217\ 8217\ 8}{217\ 8} = \frac{6\ 5346\ 534}{6\ 534} = 10001$$

5. صدّق أو لا تصدّق!

نقوم بطيّ ورقة مستطيلة الشكل سمكها0,1 ملمإلى نصفين، ونفرض أنّه يمكننا متابعة الطيّ بهذه الكيفية بالقدر الذي نشاء.

ما هو السّمك الذي ينتج عن طيّ هذه الورقة 23 مرّة؟ 30 مرّة؟ 42 مرّة؟ 81 مرّة؟ 103 مرّات؟

السمك بعد الطيّ nمرّة هو:$0,1 \times 2^n$ ملم.

- ✓ السمك بعد الطيّ 23 مرّة: ما يقارب 1 كم.
- ✓ السمك بعد الطيّ 30 مرّة: حوالي 100 كم (الدخول في الفضاء الخارجي).
- ✓ السمك بعد الطيّ 42 مرّة: حوالي 439800 كم (والمسافة بين الأرض والقمر حوالي 384400 كم).

- ✓ السمك بعد الطيّ 81 مرّة: حوالي 127,7 ألف سنة ضوئية وهو ما يعادل قطر مجرّة المرأة المسلسلة (أندروميدا Andromeda Galaxy).
- ✓ السمك بعد الطيّ 103 مرّات: حوالي 93 مليار سنة ضوئية (28,5 فرسخ فلكي) وهو ما يعادل قطر الكون المرصود حتى الآن.