الفيزياء والهندسة: الفيزياء كالهندسة والهندسة كالفيزياء
الجزء الثاني: صياغتا لاغرانج وَهاميلتون للميكانيكا الكلاسيكية

ناجي هرماس
أستاذ بقسم الرياضيات، جامعة زيان عاشور، الجلفة
nadjihermas@gmail.com

هذا المقال مُهدى إلى الأستاذ القدير محند موساوي الذي تغرَّبْ، وإلى ذكرى الأستاذ يوسف عتيق، رحمه الله، المترعة بالخير والعطاء.

1. مقدمة

في حدود عام 1602 تمكّن يوهانس كبلر Johannes Kepler، مستندًا إلى ملاحظات أستاذه تايخو براهي Tycho Brahe الرصدية، من صياغة قوانينه الفلكية الثلاثة الشهيرة، والتي نظر إليها كقوانين رصدية ميدانية ناتجة عن مُراقبات مباشرة للسماء لفترات طويلة.

لاحقًا استطاع نيوتن Newton التحقق من صحة هذه القوانين مستخدمًا القلم والورق وحدهما ومستندًا إلى مسلّمات وقوانين الميكانيكا الكلاسيكية، التي ساهم في وضعها. وقد أطلق هذا النجاح العلمي المذهل الذي حقّقه نيوتن العنان لعمليات بحث فكرية وتجريبية ضخمة وغير مسبوقة في تاريخ الغرب، كانت نتيجتها تأسيس النهضة العلمية الحديثة في الغرب. وعلى هذا الأساس يتفّق جل المؤرخين الغربيين على أنّ نيوتن هو الرجل رقم واحد في حضارتهم المعاصرة. وجعلَ نجاح نيوتن الفلاسفةَ الغربيين ينظرون بعين الدهشة والحيرة المزوجة بالرهبة إلى الرياضيات القادرة على وصف الأحداث الجارية في الكون، وقالوا من حينها الكثير جدًّا عن سرّ فعاليتها في حل مشكلات العلوم الطبيعية، وعن سر ممارستها من قِبَل الإنسان. ويعطي المرجع [8]، وهو مقال شهير للفيزيائي يوجين بول وينر Eugene Paul Wigner، لمحةً عن طبيعة وتَشعب هذا الموضوع الشائك.

أمّا وجهة نظر علماء الرياضيات إلى علمهم فقد تحدّدت بصورة شبه كاملة منذ نهاية القرن التاسع عشر الميلادي، وتحديدا بعد أن قدَّم كانتور Cantor إلى العالَم نظريته الرائدة في الرياضيات والمسماة "نظرية المجموعات"، والتي اعتبرت من حينها إلى غاية اليوم أساس الرياضيات. وأقرّ الكثير من علماء الرياضيات الكبار، وعلى رأسهم هيلبرت Hilbert، بأنّ الإطار الطبيعي الذي ينبغي أن تُؤسّس داخله الرياضيات المعتادة المستخدمة في حل مشكلات العلوم، والتي تدعى أيضا برياضيات النماذج Models، هو نظرية المجموعات الكانتورية Cantorian set theory، وهو ما تحقق على نحو كامل منذ بداية القرن العشرين. وتكفي لمحة سريعة للتأكد من أنّ جميع النظريات الرياضية المعتادة أو بالأحرى جميع النماذج الرياضية صيغت في عصرنا بلغة نظرية المجموعات $L_1\mathrm{Set}$، وهي لغة رياضية من الرتبة الأولى وتمتلك الأبجدية التالية:

- رموز الروابط المنطقية: $\neg$، $\wedge$، $\vee$، $\Rightarrow$، $\Leftrightarrow$؛
- رمزي المُكَمِّمين الوجودي والعمومي: $\exists$، $\forall$؛
- رمزي القوسين اليميني واليساري: $($، $)$؛
- رمز المساواة: $=$؛

- رمز الانتماء: $\in$؛
- رموز متغيرات أولى: x، y، z، ...؛
- رموز متغيرات ثانية خاصة بالمجموعات: X، Y، Z، ....

وهكذا فكلّ الصيغ التي نجدها في الرياضيات المعتادة هي في جوهرها 'كلمات' أو 'حشود' أو 'نضائد' لهذه الرموز، ويُعثر على الصيغ الصحيحة من بينها بالبرهان الرياضي المستند إلى المبادئ التوتولوجية وإلى المسلمات المنطقية:

- $\mathcal{P}[x \leftarrow t] \Rightarrow (\exists x)\mathcal{P}$؛
- $x = x$؛
- $t = s \Rightarrow (\mathcal{P}[x \leftarrow t] \Leftrightarrow \mathcal{P}[x \leftarrow s])$؛

والمُستخدم لقاعدتي الاستدلال:

$$\frac{\mathcal{P}, \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}}{\mathcal{Q}} \left(\text{قاعدة القياس الاستثنائي Modus ponens}\right),$$

وَ

$$\frac{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{(\exists x)\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}} \left(\text{قاعدة إدخال المُكمِّم الوجودي}\right),$$

حيث لا يظهر المتغير x حرًّا في الصيغة $\mathcal{B}$. ويمكن للقارئ المهتم بهذا الشأن أن ينظر إلى المرجعين [5] وَ[7].

إنها الطبيعة النحوية التي تبنّاها غالبية علماء الرياضيات منذ أكثر من قرن. وإنّ المرء لتستبد به الحيرة والدهشة حين يعلم أنّ كلمات الرياضيات المصاغة بهذه الطريقة البسيطة قادرة على وصف الأحداث الجارية في الكون والتنبؤ بمساراتها بدقة لا حدود لها، ولَيبدو هذا الأمر لغزا حقيقيا من ألغاز الوجود. وفي هذا السياق، هناك وجهة نظر مستندة إلى مبدأ الصَوْرنة (أو الشكْلنة) Principle of formalism المعلَن عنه من قِبَل هيلبرت وبورباكي Bourbaki:"الرياضيات هي لغات بشرية غير منطوقة، تتصف طريقة كتابة كلماتها وجملها بقدرات لا محدودة في الاختصار وإعادة التسمية وإدخال الرموز الجديدة ". ويبدو لي بأنّ الله منحنا إمكانيات معينة لاستخدام هذه اللغات الاستثنائية في فهم بعض أسرار الكون الذي نعيش فيه، والله أعلم.

منذ زمن نيوتن إلى غاية بداية القرن العشرين أُسست الرياضيات الواصفة للفيزياء، والتي تشكّلت في مجملها من نظرية المعادلات التفاضلية والصياغتين الهندسيتين الرائعتين للاغرانج Lagrange وهاميلتون Hamilton ومن هندسة ريمان Riemann، التي أُوكل إليها مهمة التعبير رياضياتيا عن نظرية النسبية العامة لأينشتاين Einstein. وهكذا أصبحنا ننظر إلى قوانين الفيزياء عبر الهندسة، فبدت لنا الفيزياء كالهندسة. بَيد أنّ سيدة من هذا العالَم اكتشفت ذات لحظة أنّ العكس أيضا صحيح، فالمبادئ والقوانين الفيزيائية ذات أصول هندسية، وأنّ ما يفعله الفيزيائيون هو أنهم ينظرون إلى الهندسة عبر الفيزياء، ومن ثمة تبدو لهم الأولى كالأخرى.

إيمي أمالي نويثر Emmy Amalie Noether (1882-1935) هي سيدة ألمانية من أصول يهودية ساهمت في عشرينيات القرن العشرين مع كل من إميل أرتين Emil Artin وهيلموت هاس Helmut Hasse وولفجانج كرول Wolfgang Krull وأوتوشراير Otto Schreier وبارتيلليندرت فان دير ويردين Bartel Leendert van der Waerden في ملحمة تأسيس الجبر المجرّد الحديث، والذي يُعدّ أهم منجزات المدرسة الألمانية للرياضيات في العصر الحالي. اعتبرت نويثر أيقونة في الرياضيات، حيث وصفها أينشتاين ذات لحظة بأنها أهم عبقرية إبداعية في الرياضيات ظهرت منذ أن سُمح رسميا للنساء بمزاولة التعليم العالي. بيد أنّ نويثر واجهت وضعا مأساويا في عام 1933 حين صرفها النازيون، كونها يهودية، عن العمل في جامعة غوتنغن Göttingen، فرحلت إلى الولايات المتحدة، وتوفيت بعد ذلك بعامين من النشاط الجامعي.

إيمي أمالي نويثر

في عام 1918 قدّمت نويثر مساهمة، في إطار صياغة لاغرانج Lagrangian formalism، للميكانيكا الكلاسيكية، ولديها في هذا الشأن مبرهنة مذهلة تحمل اسمها تؤكد أنّ معظم قوانين الحفظ الخاصة بالجمل الميكانيكية الكلاسيكية ذات منشأ هندسي؛ أي أنها ناتجة عن تناظرات حافظة لدالة لاغرانج، الأمر الذي أنار درب البحث للفيزيائيين، الذين أصبحوا يُقابلون بين قوانين الانحفاظ الفيزيائية وبين التناظرات الهندسية الحافظة لخواص دالة لاغرانج. وحتى في حالات قوانين الانحفاظ القليلة حيث لا يكون التناظر واضحًا، كانوا مع ذلك يعتبرون الحفظ ناتجا عن تناظر خفي.

ساعد مبدأ نويثر الفيزيائيين في صياغة مسلّمات ميكانيكا الكم، واعتبروه لبنةً مهمة جدًّا في بناء الفيزياء المعاصرة. وبذلك ترسخت أكثر فأكثر في الأذهان الفكرة المُحيِّرة القائلة بأنّ القوانين الفيزيائية ناتجة عن البنية الهندسية للكون، والتي وفقها أصبحت الفيزياء تابعة على نحو ما للهندسة.

يهدف هذا المقال الثقافي والتعليمي إلى عرض وإثبات مبرهنة نويثر، ويُعنى الجزء الثاني منه بتقديم عرض يسير حول صياغتي لاغرانج وَهاميلتون للميكانيكا الكلاسيكية.

2. . الصياغة اللاغرانجية وإحداثياتها الهندسية الجديدة

لوصف حركات بعض النظم الميكانيكية، أدخل لاغرانج في عام 1790 إلى النظرية الرياضية للميكانيكا الكلاسيكية دالة جديدة

$$\mathfrak{L}: (q, \dot{q}) \mapsto \mathfrak{L}(q, \dot{q}),$$

مُعرَّفة في نظام إحداثي هندسي جديد $(q, \dot{q}) = (q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$. وحملت هذه الدالة منذ ذلك الحين الاسمين 'اللاغرانجيان' Lagrangian وَ'الدالة اللاغرانجية' Lagrangian function للجملة الميكانيكية قيد الدراسة، وهي تُأخذ غالبا مساوية للطاقة الحركية مطروحا منها الطاقة الكامنة. وقد برهن لاغرانج بأن معادلة نيوتن للحركة مكافئة لنظام المعادلات التفاضلية

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q^k} = 0, 1 \leq k \leq n,$$

والمسماة 'معادلات أويلر-لاغرانج'. ولا شك في أن الكتابة الصريحة التالية لهذه المعادلات تساعد كثيرا على فهمها واستيعاب معناها:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^k} \circ \left(q, \frac{dq}{dt}\right)\right)(t) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q^k}\left(q(t), \frac{dq}{dt}(t)\right) = 0, 0 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{T}, 1 \leq k \leq n,$$

حيث T عدد حقيقي موجب تماما.

في حوالي عام 1830، استطاع وليام هاميلتون William Hamilton مستخدما حيلة تفاضلية بارعة أن يثبت بأن منحى $q: t \mapsto q(t)$ يحقق هذه المعادلات، إذا وإذا فقط، حقق المبدأ التغيري Variational principle

$$\delta \int_0^T \mathfrak{L}\, dt = \delta \int_0^T \mathfrak{L}\left(q(t), \frac{dq}{dt}(t)\right) dt = 0,$$

والمعروف باسم 'مبدأ الفعل الحَرِج' Principle of critical action، حيث تشير δ إلى عملية تفاضلية معينة. في بداية القرن الثامن عشر لم يكن حساب التفاضل في الأبعاد غير المنتهية مؤسسا، ومن ثمة لم يكن بمقدور هاميلتون الاستفادة منه، ومع ذلك فقد قام بتطوير العملية التفاضلية δ على فراغ الداليات

$$q \mapsto \int_0^T \mathfrak{L}\left(q(t), \frac{dq}{dt}(t)\right) dt,$$

ذي البعد غير المنتهي على النحو الآتي:

$$\delta \int_0^T \mathfrak{L}\, dt = \frac{d}{ds} \int_0^T \mathfrak{L}\big(\Gamma(s,t), \partial_t \Gamma(s,t)\big)\, dt \Big|_{s=0},$$

علما أن Γ دالة معرفة على $]-\varepsilon, \varepsilon[\times [0, \mathrm{T}]$، وتحقق

$$(\forall t \in [0,T])\big(\Gamma(0,t) = q(t)\big),$$
$$(\forall s \in]-\varepsilon, \varepsilon[)\big(\Gamma(s,0) = q(0)\big),$$
$$(\forall s \in]-\varepsilon, \varepsilon[)\big(\Gamma(s,T) = q(T)\big).$$

تدعى Γ تغييرا ذا نهايتين ثابتتين للمنحنى q.

لنقم الآن ببعض الحساب. استنادا إلى قاعدة السلسلة لحساب التفاضل يمكننا أن نكتب

$$\frac{d}{ds} \int_0^T \mathfrak{L}\big(\Gamma(s,t), \partial_t \Gamma(s,t)\big)\, dt = \sum_{k=1}^n \int_0^T \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q^k}\big(\Gamma(s,t), \partial_t \Gamma(s,t)\big) \frac{\partial \Gamma^k}{\partial s}(s,t) dt$$
$$+ \sum_{k=1}^n \int_0^T \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^k}\big(\Gamma(s,t), \partial_t \Gamma(s,t)\big) \frac{\partial^2 \Gamma^k}{\partial s \partial t}(s,t) dt.$$

وعليه بمكاملة الطرف الأخير بالتجزئة نحصل على

$$\frac{d}{ds}\int_0^T \mathfrak{L}\big(\Gamma(s,t),\partial_t\Gamma(s,t)\big)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\int_0^T \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q^k}\big(\Gamma(s,t),\partial_t\Gamma(s,t)\big)\frac{\partial\Gamma^k}{\partial s}(s,t)dt$$
$$-\sum_{k=1}^{n}\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^k}\big(\Gamma(s,t),\partial_t\Gamma(s,t)\big)\right\}\frac{\partial\Gamma^k}{\partial s}(s,t)dt$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^k}\big(\Gamma(s,T),\partial_t\Gamma(s,T)\big)\frac{\partial\Gamma^k}{\partial s}(s,T)-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^k}\big(\Gamma(s,0),\partial_t\Gamma(s,0)\big)\frac{\partial\Gamma^k}{\partial s}(s,0)\right\}.$$

لكن الطرف الأخير يساوي 0 لأن

$$(\forall s\in\,]-\varepsilon,\varepsilon[)\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,T)=\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,0)=0\right),$$

وبالتالي فإنه لدينا

$$\delta\int_0^T \mathfrak{L}\,dt=\sum_{k=1}^{n}\int_0^T\left\{\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q^k}\left(q(t),\frac{dq}{dt}(t)\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^k}\left(q,\frac{dq}{dt}\right)\right\}(t)\right\}\frac{\partial\Gamma^k}{\partial s}(0,t)dt$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\int_0^T\left\{\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q^k}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^k}\right)\right\}\frac{\partial\Gamma^k}{\partial s}(0,t)dt.$$

من هنا يبدو واضحا أنه إذا كان المنحنى q يحقق معادلات أويلر-لاغرانج، فإنه يحقق أيضا مبدأ الفعل الحرج

$$\delta\int_0^T \mathfrak{L}\,dt=0.$$

بالعكس، لنفرض الآن أن هذا المبدأ هو المُحَقق، ولنضع

$$\Gamma(s,t)=s\varphi(t)+q(t),s\in\mathbb{R},t\in[0,T],$$

حيث φ دالة كيفية تحقق الشرط $\varphi(0)=\varphi(T)=0$. ليس صعبا الملاحظة بأن Γ هي تغيير ذو نهايتين ثابتتين للمنحنى q، وعليه يأتي

$$\delta\int_0^T \mathfrak{L}\,dt=\sum_{k=1}^{n}\int_0^T\left\{\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q^k}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^k}\right)\right\}\varphi^k(t)dt=0.$$

لكن بما أن الدوال φ^k، $1\le k\le n$، هي كيفية، فإن هذه المساواة تؤدي حتما إلى معادلات أويلر-لاغرانج

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q^k}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^k}\right)=0,1\le k\le n.$$

3. الصياغة الهاميلتونية وإحداثياتها الهندسية

لقد أوضحنا الخطوة التقنية الأولى التي قام بها هاميلتون، بينما تتمثل خطوته التقنية الثانية في قيامه هو الآخر بإدخال نظام إحداثيات جديد (q,p)، وذلك بوضع

$$p_k=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^k}(q,\dot{q}),1\le k\le n,$$

ثم تعريفه لدالة جديدة $\mathcal{H}: (q,p) \mapsto \mathcal{H}(q,p)$، أطلق عليها من حينها اسم هاميلتوني Hamiltonien الجملة الميكانيكية، على النحو الآتي

$$\mathcal{H}(q,p) = \sum_{k=1}^{n} p_k \dot{q}^k - \mathfrak{L}(q,\dot{q}).$$

ولقد استطاع هاميلتون أن يثبت، تحت فرضية أن التحويل النقطي $(q,\dot{q}) \mapsto (q,p)$-والمسمى تحويل لوجندر- قابل للعكس، بأن معادلات أويلر-لاغرانج مكافئة للمعادلات التالية الحاملة لاسمه

$$\begin{cases} \dfrac{dq^k}{dt}(t) = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}\big(q(t),p(t)\big); \\ \dfrac{dp_k}{dt}(t) = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k}\big(q(t),p(t)\big), \end{cases}$$

والتي تتمتع بتناظر مدهش، الأمر يكشف عن غناها الهندسي. ويمكن صياغة هذه الجملة كما يلي

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt}(t) = \nabla_p \mathcal{H}\big(q(t),p(t)\big); \\ \dfrac{dp}{dt}(t) = -\nabla_q \mathcal{H}\big(q(t),p(t)\big), \end{cases}$$

حيث $\nabla_q \mathcal{H} = \big(\partial_{q^1}\mathcal{H}, \dots, \partial_{q^n}\mathcal{H}\big)$ وَ $\nabla_p \mathcal{H} = \big(\partial_{p_1}\mathcal{H}, \dots, \partial_{p_n}\mathcal{H}\big)$.

في الحقيقة لم تكن أفكار لاغرانج وهاميلتون المُشار إليها أصيلة وذات أهمية قصوى في الميكانيكا الكلاسيكية فحسب، وإنما أيضا كشفت، وهذا هو الأهم، النقاب عن عالَم هندسي خفي شديد الثراء بالأفكار الجديدة، عالم أطلق عليه هيرمان ويل Hermann Weyl في عام 1939 اسم الهندسة 'الهندسة التشابكية' Symplectic geometry. فإحداثيات لاغرانج تنتمي إلى ما يعرف في الهندسة التفاضلية باسم الحزم المماسية The tangent bundles، بينما تنتمي مثيلتها التي حدثنا عنها هاميلتون إلى ما يعرف بالحزم التَّمَماسية The cotangent bundles، وهي كلها بنى هندسية حديثة لم يتم دراستها على نحو جاد إلا بداية من خمسينيات القرن العشرين.

وأسوة بنجاح أفكار لاغرانج وهاميلتون في إيجاد طرق هندسية جديدة فعالة في صياغة ومعالجة مسائل الميكانيكا الكلاسيكية، يتم في الوقت الحالي دراسة الهندسة التشابكية وزميلتها هندسة بواسون Poisson geometry بشكل مكثف على أمل حل المشكلة الأهم والأشهر في الفيزياء الراهنة، وهي العثور على إطار مُوحِد لنظريتي النسبية العامة وميكانيكا الكم.

يُتَّبَع في الجزء الثالث.

مراجع للاستزادة

[1] Abraham, R. and Marsden, J.E., Foundations of Mechanics, Addison-Wesley, Redwood City, 1987.
[2] Arnold, V. I., Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer-Verlag, New York, 1989.
[3] Deriglazov, A., Classical Mechanics: Hamiltonian and Lagrangian Formalism, Springer International Publishing Switzerland, 2017.
[4] Godbillon, C., Géométrie différentielle et mécanique analytique, Hermann, Paris, 1969.
[5] Jech, T., Set Theory, The Third Millennium Edition, Revised and Expanded, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1997, 2003.

[6] Marsden, J.E. and Ratiu, T.S., Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems, Springer-Verlag, New York, 1999.
[7] Tourlakis, G., Lectures in Logic and Set Theory, Volume 2: Set Theory, Cambridge University Press, 2003.
[8] Wigner, E.P., The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 13 (1), 1960, 1-14.

***

وليام هاميلتون William Hamilton (1965-1805)